Über das

elektrische und thermische Leitungsvermögen einiger Kupfer-Zinn-Legierungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Hohen philosophischen Fakultät

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

Universität Zürich

von

Gustav Grossmann,

aus Budapest (Ungarn).

Begutachtet von den Herren

Prof. Dr. **A. Kleiner** und Prof. Dr. **H. F. Weber.**

Zürich

Druck von F. Lohbauer, Rämistrasse 12

1903.

Über das

elektrische und thermische Leitungsvermögen einiger Kupfer-Zinn-Legierungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Hohen philosophischen Fakultät
(Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion)

der

Universität Zürich

von

Gustav Grossmann,
aus Budapest (Ungarn).

Begutachtet von den Herren
Prof. Dr. **A. Kleiner** und Prof. Dr. **H. F. Weber.**

Zürich
Druck von F. Lohbauer, Rämistrasse 12
1903.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Prof. Dr. H. F. Weber

in aufrichtiger Dankbarkeit

gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549811_0143

Einleitung.

1. Die Beziehung zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und der elektrischen Leitungsfähigkeit der Legierungen.

Der von Forbes[1]) bereits im Jahre 1831 mutmasslich ausgesprochene Satz vom Parallelismus zwischen dem elektrischen Leitungsvermögen und der thermischen Leitfähigkeit von reinen Metallen, welcher zuerst vor fünfzig Jahren von Wiedemann und Franz[2]) auf Grund ihrer an neun Metallen durchgeführten sorgfältigen Versuche als nahezu gültig dahingestellt worden ist, wurde sechs Jahre später, im Jahre 1859 von Wiedemann[3]) auch auf Legierungen ausgedehnt, nachdem dieser auf Anregung einer Abhandlung von Calvert und Johnson[4]), in welcher die Richtigkeit des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes bestritten worden war, die relativen thermischen und elektrischen Leitvermögen von elf Legierungen bestimmt hatte.

Die bald darauf entstandenen experimentellen Arbeiten, welche eine Anhäufung zuverlässigen Beweismaterials für die Gültigkeit des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes bezweckten, wie diejenigen von F. E. Neumann[5]), R. Lenz[6]), H. F. Weber[7]), Kirchhoff und Hansemann[8]), Lorenz[9]), A. Berget[10]) erstrecken sich zumeist auf reine Metalle, während Legierungen nur in wenigen Fällen in den Bereich der Untersuchungen gezogen werden. Während nun aus allen diesen Arbeiten ein von dem der reinen

---

[1]) G. Forbes, Proc. Roy. Soc. Edinb. **1**. 133. 1860.
[2]) G. Wiedemann u. R. Franz, Pogg. Ann. **89**. 498. 1853.
[3]) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **108**. 393. 1859.
[4]) C. Calvert u. R. Johnson, Phil. Trans. Roy. Soc. London **148**. 349. 1858.
[5]) F. E. Neumann, Ann. de chim. et phys. (3). **66**. 183. 1862.
[6]) R. Lenz, Bull de l'Ac. de St-Pétersbourg. **14**. 54. 1870.
[7]) H. F. Weber, Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich. **25**. 161. 1880.
[8]) G. Kirchhoff u. G. Hansemann, Wied. Ann. **13**. 406. 1881.
[9]) L. Lorenz, Wied. Ann. **13**. 422, 598. 1881.
[10]) A. Berget, Journ. de Phys. (2) **9**. 135. 1890.

Metalle absonderliches Verhalten der Legierungen nicht zu erkennen ist, weisen ein solches Nernst und v. Ettingshausen [1]) an Wismut-Zinn-Legierungen, van Aubel [2]) an Aluminiumbronze, Nickeleisen und Konstantan nach.

Aus der Reihe der reinen Metalle tritt das Eisen in auffälliger Weise hervor, dessen Sonderstellung Kirchhoff und Hansemann durch seine magnetischen Eigenschaften zu begründen suchen.

Auch Jäger und Diesselhorst [3]) finden in Übereinstimmung mit Kirchhoff und Hansemann, F. Kohlrausch [4]) und Schulze [5]) für Eisen und Stahl ganz erhebliche Abweichungen gegenüber den übrigen Metallen, was dem Umstande zugeschrieben wird, dass das Eisen bei keiner jener Untersuchungen rein vorlag, sondern stets mit fremden Substanzen legiert war. Um hierfür einen Beweis zu erbringen, hat Grüneisen [6]) den Einfluss von Verunreinigungen reiner Metalle auf das Leitverhältnis untersucht. Er fand für eine Reihe von Eisensorten, die nur geringe Zusätze von Si und Kohle enthielten und für mit As verunreinigtes Kupfer, dass Verunreinigungen das Leitvermögen für Elektrizität ($\varkappa$) stärker hinabdrücken als dasjenige für Wärme (k), so dass die Vermehrung des Prozentgehaltes an verunreinigenden Substanzen ein erhebliches Anwachsen des Wertes von $\frac{k}{\varkappa}$ zur Folge hat.

Im gleichen Sinne, und in noch erheblicherem Masse als Eisen und Stahl, weichen die von Jäger und Diesselhorst untersuchten drei Legierungen: Rotguss, Konstantan und Manganin ab.

In einem gewissen Gegensatz zu diesen Erfahrungen findet Rietzsch [7]) an Cu-P- und Cu-As-Legierungen für das Leitverhältnis kleinere Werte als für das reine Metall Kupfer, Hand in Hand mit einer stärkeren Beeinflussung des thermischen Leitvermögens als des elektrischen seitens der dem Kupfer beigemengten Metalloide.

---

[1]) A. v. Ettingshausen u. Nernst, Wied. Ann. **33**. 487. 1888.

[2]) E. v. Aubel u. R. Paillot, Journ. de Phys. (3) **4**. 522. 1895.

[3]) W. Jäger u. H. Diesselhorst, Berl. Ber. **38**. 719. 1899; Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanst. **3**. 269. 1900.

[4]) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **33**. 678. 1888.

[5]) F. A. Schulze, Wied. Ann. **63**. 23. 1897.

[6]) E. Grüneisen, Drudes Ann. **3**. 43. 1900.

[7]) A. Rietzsch, Drudes Ann. **3**. 403. 1900.

Ich fasse nun im folgenden die Werte des Leitverhältnisses für Legierungen zusammen, welche aus den citierten Arbeiten hervorgehen, wobei ich alle Werte mit Zugrundelegung der Einheiten: cm, gr, sec und 1° C auf 18° so umrechne, dass als Einheit der Wärmemenge das erg figuriert.

Material	$\frac{k}{\varkappa} . 10^{-8}$	Beobachter
Kupfer-Zink $\frac{8}{1}$	687	G. Wiedemann
Kupfer-Zink $\frac{6,5}{1}$	714	G. Wiedemann
Kupfer-Zink $\frac{4,7}{1}$	785	G. Wiedemann
Messing $\frac{2,1}{1}$	747	G. Wiedemann
Messing	875	H. F. Weber
Messing (rot)	696	L. Lorenz.
Messing (gelb)	720	L. Lorenz.
Rotguss	757	W. Jäger u. H. Diesselhorst.
Cu-As 1	685	E. Grüneisen.
Cu-As 2	831	E. Grüneisen.
Fe mit 0,1 % C, 0,1 % Si, Mn	727	E. Grüneisen.
Fe mit 0,6 % C, 0,4 % Si, Mn	854	E. Grüneisen.
Fe mit 1,0 % C, 0,2 % Si, Mn	845	E. Grüneisen.
Fe mit 1,5 % C, 0,3 % Si, Mn	907	E. Grüneisen.
Nickel-Kupfer	1020	E. Grüneisen.
Zinn-Wismut $\frac{3}{1}$	759	G. Wiedemann.
Zinn-Wismut $\frac{1}{1}$	658	G. Wiedemann.
Zinn-Wismut $\frac{1}{3}$	826	G. Wiedemann.
Wood'sches Metall	615	H. F. Weber.
Neusilber	822	L. Lorenz.
Aluminiumbronze	903	van Aubel.
Nickeleisen	1440	van Aubel.
Konstantan	1427	van Aubel.
Konstantan	1106	W. Jäger u. H. Diesselhorst.
Manganin	914	W. Jäger u. H. Diesselhorst.

Diese Reihe von Zahlenwerten, deren Abweichungen von einander sich durch Beobachtungsfehler in keiner Weise erklären lassen, lässt uns unzweideutig erkennen, dass das Wiedemann-Franz'sche Gesetz für Legierungen nicht allgemein gültig sein kann.

Wird nun daran festgehalten, dass das Wiedemann-Franzsche Gesetz für Legierungen im allgemeinen ungültig ist, so muss die Annahme wahrscheinlich erscheinen, dass das Leitverhältnis für Legierungen zweier reiner Metalle eine mit dem Mischungsverhältnis gesetzmässig veränderliche Grösse sein und demzufolge auch als Kriterium für die chemische Beschaffenheit von Legierungen dienen dürfte.

Erst in allerneuester Zeit ist der erste, bis nun auch einzige systematische, den Einfluss des Mischungsverhältnisses berücksichtigende Versuch über die Variation des Leitverhältnisses von Legierungen, und zwar von Schulze [1]) gemacht worden. Schulze untersuchte Wismut-Blei, Wismut-Zinn und Zink-Zinn-Legierungen und fand das interessante Resultat, dass bei all' den drei Legierungsgruppen das thermische Leitvermögen in Funktion der relativen Volumina der Bestandteile einen Verlauf ähnlichen Charakters aufweist, als die elektrische Leitungsfähigkeit, wobei das Leitverhältnis für die Zinn-Zink-Legierungen so gut wie konstant ist, während für die andern zwei Gruppen von Legierungen von einander erheblich abweichende Werte des Leitverhältnisses resultieren, indem diese sich zwischen $672 . 10^8$ und $1104 . 10^8$ bewegen.

Durch die Ergebnisse dieser Versuche wird aber nicht bloss ein Beweis gegen die Allgemeingültigkeit des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes für Legierungen erbracht, sie sagen noch viel mehr aus; denn es ist aus ihnen eine von Schulze selbst unbeachtet gelassene Gesetzmässigkeit im Verlaufe des Leitverhältnisses ableitbar, wodurch obige Resultate doppelte Beweiskraft und weitere Bedeutung gewinnen.

Bekanntlich teilt Matthiessen [2]) die Metalle auf Grund der charakteristischen Verschiedenheiten im Verlaufe der Kurven, welche die elektrische Leitungsfähigkeit binärer Legierungen in Funktion der Zahl Volumprozente ihrer Bestandteile veranschaulichen, in zwei Gruppen ein. Die Metalle der Gruppe I unter

[1]) F. A. Schulze, Drudes Ann. **9**. 555. 1902.

[2]) A. Matthiessen und M. Holzmann, Pogg. Ann. **110**. 190. 1860.

einander legiert haben das mittlere Leitungsvermögen der in ihnen gemischten Volumina der beiden Metalle, während die Legierungen zweier Metalle, die den zwei verschiedenen Gruppen angehören, die Elektrizität stets schlechter leiten, als es dem Verhältnis der Volumina ihrer Bestandteile entsprechen würde.

Zinn und Zink gehören nun beide der Gruppe I an, Wismut und Blei dagegen gehören in die Gruppe II. Für die Sn-Zn-Legierungen findet nun Schulze eine fast vollkommene Konstanz des Leitverhältnisses; d. h. es ist für diese Legierungen nicht nur die elektrische, sondern auch die thermische Leitungsfähigkeit eine rein additive Eigenschaft. Für die Bi-Sn- und Bi-Pb-Legierungen dagegen ergibt sich, dass der Zu- resp. Abnahme der elektrischen und thermischen Leitungsfähigkeit eine Ab- resp. Zunahme des Leitverhältnisses entspricht, so, dass letzteres da, wo die beiden Leitvermögen Minima aufweisen, ein Maximum hat; ausserdem tritt noch auf der Sn-Seite in beiden Fällen ein Maximum des Leitverhältnisses auf.

Kann also in der Variation des Leitverhältnisses eine Gesetzmässigkeit und weiterhin noch zwischen jener und der Variation der beiden Leitvermögen ein organischer Zusammenhang konstatiert werden, so ist damit ein Beweis für den oben ausgesprochenen Satz erbracht.

* * *

An die Beziehung zwischen thermischem und elektrischem Leitvermögen auf rein theoretischem Wege hinanzutreten haben wohl nur wenige versucht, aber etwas Positives zu Tage zu fördern, hat keiner dieser vermocht.

Wir brauchen nur an die durch zahlreiche Versuche zweifellos bewiesene Unhaltbarkeit der zwei, aus rein theoretischen Erwägungen heraus abgeleiteten Gesetze von Clausius [1]) und Lorenz [2]), wonach das elektrische Leitvermögen aller reiner Metalle einerseits, das Leitverhältnis für sämtliche Metalle anderseits mit der absoluten Temperatur proportionale Grössen seien, zu erinnern, um einzusehen, dass eine rein theoretische Untersuchung dieser Art so lange wertlos ist, als nebst den thermischen und elektrischen Zustandsänderungen nicht auch noch

[1]) R. Clausius, Pogg. Ann. **104**. 650. 1858.
[2]) L. Lorenz, Pogg. Ann. **147**. 429. 1872; Wied. Ann. **13**. 598. 1881.

auf solche nach anderen Zustandsseiten hin, wenigstens auf Kohäsionsänderungen Rücksicht genommen wird.

In Wiedeburg's gedankenreicher Abhandlung »Über nicht-umkehrbare Vorgänge«, in welcher dem eben erwähnten Umstande Rechnung getragen wird, finden wir auf rein energetischem Wege — wohl auf eine sämtlichen Betrachtungen zu Grunde gelegte hypothetische Erweiterung der Energiegleichung gestützt — Ausdrücke für die thermische und elektrische Widerstandsgrösse hergeleitet [1]), die ohne weiteres erkennen lassen, dass das Leitverhältnis nur so als eine von der Art der Substanz unabhängige Grösse betrachtet werden kann, wenn man über die da eintretenden Konstanten von vorneherein ganz willkürlich erscheinende Annahmen machen würde. Die Wiedeburg'schen Entwickelungen lassen also das Wiedemann-Franz'sche Gesetz als unwahrscheinlich erscheinen.

Wir wollen auch noch Riecke [2]) und Drude [3]) gedenken, die, auf zahlreiche Hypothesen gestützt, aus der Elektronentheorie heraus das Wiedemann-Franz'sche und Lorenz'sche Gesetz herleiteten, während ersterer, nachdem die Unhaltbarkeit des Lorenz'schen Gesetzes klargelegt worden ist, seine Betrachtungen später noch insofern abändert [4]), dass er einen Temperatur-Koeffizienten des Leitverhältnisses einführt.

Also hat die Theorie die Lösung der behandelten Frage zu fördern nicht vermocht, und wird diese erst dann möglich sein, wenn sich eine genügende Masse zuverlässiger Messresultate angesammelt haben wird. Ich bezwecke nun mit den vorliegenden Untersuchungen an Bronze-Legierungen ein Scherflein dazu beizutragen.

2. Über Kupfer-Zinn-Legierungen.

Legierungen hat man behufs Ermittelung ihrer chemischen Natur und zwecks Auffindung der unter ihnen vielfach vermuteten und mit Vorliebe gesuchten chemischen Verbindungen nach verschiedenen Richtungen hin untersucht.

[1]) O. Wiedeburg, II. Abhandlg. Wied. Ann. **62**. 652. 1897.
[2]) E. Riecke, Wied. Ann. **66**. 353. 1898.
[3]) P. Drude, Drudes Ann. **1**. 566. 1900.
[4]) E. Riecke, Drudes Ann. **2**. 835. 1900.

Das erste Augenmerk finden wir auf die Dichte, Härte und Biegungsfestigkeit gerichtet. Bezüglich Kupfer-Zinn-Legierungen entnehmen wir aus der Arbeit von Calvert und Johnson [1]), dass sich die Legierungen mit grossem Zinngehalt durch Weichheit bemerkbar machen, diejenigen mit einem grossen Überschuss an Kupfer sich durch enorme Härte, die zwischenliegenden aber durch ausnehmend grosse Sprödigkeit auszeichnen. Letztere beginnt etwa bei den Legierungen Sn_2Cu—SnCu, welche 21—35 Vol. % Kupfer enthalten, aufzutreten und hört bei denjenigen mit 73—84 Vol. % Kupfer, also ungefähr bei $SnCu_5$—$SnCu_{10}$ auf. Die Bronze mit 84 Vol. % Kupfer ist fast ebenso hart wie Roheisen.

Aus Kiewiet's [2]) Arbeit über die Biegungselastizität reiner Legierungen können wir für das spezifische Gewicht, den Elastizitätsmodul E_0 für 0 °C und den Koeffizienten α der linearen Ausdehnung einiger Kupfer-Zinn-Legierungen folgende Angaben entnehmen:

Materie	Spezif. Gewicht beob.	ber.	Kontraktion	Dilatation	E_0 beob.	ber.	$\alpha . 10^{-4}$
Cu (II u. III) rein	8,9	—	—	—	12,30	—	5,5
Cu 89,8, Sn 10,2	8,58	8.70	—	0,12	9,73	11,54	6,27
Cu 67,1, Sn 32,9	8,93	8.28	0.66	—	11.86	9,82	3,21
Cu 50,0, Sn 50,0	8,68	7,94	0,74	—	8,60	8.53	9,99
Cu 41,2, Sn 58,7	8,31	7,79	0,52	—	8,31	7.88	10,89
Sn, rein	7,16	—	—	—	4,77	—	37,77

Eine ganz ähnliche Variation, wie für die Dichte, den Elastizitätsmodul und den Kompressibilitäts-Koeffizienten, gilt auch für das elektrische Leitungsvermögen dieser Legierungen. Lodge und Roberts Austen [3]) fanden, dass das elektrische Leitungsvermögen des Kupfers durch Zusatz von Zinn rasch vermindert wird, bis bei einer Zusammensetzung der Formel Cu_4Sn entsprechend ein Minimum der Leitfähigkeit auftritt; alsdann steigt diese wieder an, erreicht bei der Legierung Cu_3Sn ein Maximum

[1]) F. C. Calvert und R. Johnson, Pogg. Ann. **108**. 579. 1859.
[2]) J. Kiewiet, Wied. Ann. **29**. p. 617. 1886.
[3]) O. Lodge und Roberts Austen, Phil. Mag. [5] **8**. 551. 1879.

und fällt sodann ab. Ähnliche Resultate gehen aus den diesbezüglichen Messungen von Kaminsky [1]) und Ball [2]) hervor.

Analog fanden Calvert und Johnson [3]), dass das thermische Leitungsvermögen der Kupfer-Zinn-Legierungen bei Cu_4Sn ein Minimum, bei Cu_3Sn ein Maximum hat.

Zuverlässigere Resultate liefern die Messungen von Matthiessen und Voigt [4]), die das elektrische Leitungsvermögen und dessen Temperatur-Koeffizienten für sieben Kupfer-Zinn-Legierungen ermittelt haben. Die von ihnen angegebenen elektrischen Leitungsfähigkeiten bei 0° C, in absolutes Mass umgerechnet, (die absolute elektrische Leitungsfähigkeit des hartgezogenen Silbers bei 0° C ist gleich $59{,}7 \cdot 10^{-5}$ gesetzt worden) und die Temperatur-Koeffizienten des elektrischen Widerstandes sind die folgenden:

Vol.% Sn	$(10^{+5} \cdot \varkappa)$ f. 0° C	α	Vol.% Sn	$(10^{+5} \cdot \varkappa)$ f. 0° C	α
1,4	37,28	0,00217	14,9	5,27	0,00052
6,0	11,78	092	83,6	7,62	262
11,6	7,22	066	93,55	7,18	287
12,35	6,05	055			

Diese Resultate zeigen also, dass ebenso wie die elektrische Leitungsfähigkeit, so auch der Temperatur-Koeffizient des elektrischen Widerstandes von Kupfer-Zinn-Legierungen mit von Null anwachsendem Zinngehalt rapid abfällt.

Bekanntlich ordnet Matthiessen den Knickpunkten, resp. Maximis und Minimis der Kurven, welche die elektrische Leitungsfähigkeit binärer Legierungen in Funktion der Volumprozente ihrer Bestandteile darstellen, chemische Verbindungen zu und glaubt die Richtigkeit seiner Behauptung auch durch die abnorme Dichte und das anomale Aussehen der diesen Knickpunkten entsprechenden Legierungen bestätigt finden zu können.

Nach Matthiessen müsste es also zwei chemische Verbindungen von Kupfer und Zinn geben: Cu_3Sn und Cu_4Sn.

[1]) G. Kaminsky, Chem. News. **47**. 304. 1882.
[2]) E. J. Ball, Journ. Chem. Soc. LIII. **167**; Beibl. **12**. 586. 1888.
[3]) C. Calvert und R. Johnson, Philos. Trans. 1858.
[4]) A. Matthiessen und C. Voigt, Pogg. Ann. **122**. 19. 1884.

Aus der von Liebenow[1]) entwickelten Ostwald'schen Theorie der elektrischen Leitung in Metallen geht für Metallverbindungen als Charakteristikon die Eigenschaft hervor, dass sie die Elektrizität im Verhältnis der relativen Volumina ihrer Bestandteile leiten, und dass der Temperatur-Koeffizient des Widerstandes demjenigen der reinen Metalle nahe kommen muss. Aus dieser Anschauungsweise heraus (deren Richtigkeit übrigens noch nicht bewiesen worden ist), betreffs Kupfer-Zinn-Legierungen Schlüsse ziehen können wir wegen Mangels an Versuchsdaten nicht.

Weit geeigneter zur Lösung der Frage über das Auftreten chemischer Verbindungen unter den Legierungen sind die Untersuchungen über die Lösungstension der Legierungen gewissen Lösungsmitteln gegenüber. Aus den diesbezüglichen Versuchen von Laurie[2]) und Herschkovitsch[3]) geht hervor, dass die Verbindung Cu_3Sn faktisch existiert. Die Existenz der Verbindung Cu_4Sn lässt sich aus diesen Versuchen heraus nicht konstatieren.

Wichtige Aufschlüsse über das Wesen der Metall-Lösungen geben die Erscheinungen während des Erstarrens, ihr kryoskopisches Verhalten. Man unterscheidet drei charakteristische Formen von Schmelzpunktskurven, und dementsprechend teilt E. Heyn[4]) die Legierungen in drei Gruppen ein. Leider stiess man bei den diesbezüglichen Untersuchungen an Kupfer-Zinn-Legierungen auf grosse Schwierigkeiten, die noch der Aufklärung harren.

Dass die Kupfer-Zinn-Legierungen erstarrte Lösungen, isomorphe Gemische sind, ist auf Grund der bisherigen Erfahrungen sicher, und es kann als wahrscheinlich angenommen werden, dass es mindestens eine eutektische Kupfer-Zinn-Legierung gibt.

In vorliegender Schrift teile ich die Resultate meiner an reinem Zinn und vier Kupfer-Zinn-Legierungen angestellten Untersuchungen mit, welche sich auf das elektrische und thermische Verhalten der genannten Metalle erstrecken.

---

[1]) C. Liebenow, Der elektrische Widerstand der Metalle. 1898.

[2]) Laurie, Journ. Chem. Soc. **302**. 104. 1888; **325**. 677. 1889. Phil. Mag. [5] **33**. 94.

[3]) M. Herschkowitsch, Zeitschr. f. Phys. Chem. **27**. 123. 1898.

[4]) C. Heyn, Zt. d. Ver. deutsch. Ing. 1900. 137.

Auf Anregung des Herrn Prof. Dr. H. F. Weber habe ich zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit die von ihm im 25. Bande der Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich veröffentlichte Methode benutzt, welche aus der Beobachtung der Abkühlungsvorgänge innerhalb eines in einem Raume konstanter Temperatur aufgestellten Ringes das thermische Leitungsvermögen der Ringsubstanz herzuleiten gestattet.

Das elektrische Leitungsvermögen habe ich ebenfalls absolut, und zwar nach der elektromagnetischen Dämpfungsmethode von Wilh. Weber ermittelt.

Meine Messungen begann ich im Januar 1901 mit der Bestimmung der elektrischen Leitungsvermögen; in den Lenzmonaten des Jahres 1902 nahm ich die Vorversuche zum thermischen Teile der Arbeit vor, welchen selbst ich im Sommer und Herbst desselben Jahres vollführte.

I.

Die untersuchten Metalle.

Zur Herstellung der untersuchten Metalle wurde elektrolytisches Kupfer und chemisch reines Zinn aus der Fabrik von E. Merck in Darmstadt verwendet.

Das Rohmaterial wurde zwecks Verschlackung der beim Schmelzen entstehenden Metalloxyde mit einer dicken Schicht Borax bedeckt, in hessischen Tiegeln zum Schmelzen gebracht. Das Zusammenschmelzen der Metalle erfolgte derart, dass das granuliert bezogene Zinn erst dann beschickt wurde, nachdem das in kleine Stücke zerschnittene Kupfer bereits geschmolzen war. Die Form, in welche die zu untersuchenden Metalle zu bringen waren, ist durch die oben erwähnte Methode der Wärmeleitfähigkeitsmessung als die Ringform festgesetzt gewesen.

Die Ringe wurden in Formen aus schwarzem Sand von einer zentralen Eingusstelle aus, welcher vier radiale, mit Steigkanälen versehene Giesskanäle entsprangen, gegossen.

Nachdem ein auch nur einigermassen blasenfreier Kupferguss auch nach fünfmaligem Umgiessen nicht gelungen war, musste leider von der Untersuchung des reinen Kupfers Abstand genommen werden. Es wurden ein Zinn-Ring und Bronzen mit ca. 10, 25, 75 und 90 Gewichtsteilen Kupfergehalt hergestellt.

Die Bronze zu 25 Gewichtsteilen Kupfer gewann ich zuerst als ein Gebilde nadelförmiger Krystalle, das nach zweimaligem Umschmelzen in ein dunkelgraues, weiches, amorphes Produkt überging. Die Legierung Sn_9Cu ist hellgrau, fast ebenso weich wie Zinn; die Bronze $SnCu_9$ ist rötlich, sehr hart, jedoch gut drehbar. Die Bronze $SnCu_3$ ist ganz ausnehmend hart und ausserordentlich spröde; ihre Farbe ist rötlich-grau; sie zeichnet sich durch auffällig grosse Dichte aus, die von der nach den relativen Volumina ihrer Bestandteile berechneten Dichte ganz erheblich abweicht und derjenigen des reinen Kupfers sehr nahe kommt.

Die Gussstücke, deren Querschnitt 2,5 × 2,5 cm² betrug, wurden zu Ringen von 1,7 × 1,7 cm² Querschnitt abgedreht. Nachdem letztere auf ihr elektrisches Verhalten hin untersucht waren, wurden sie nochmals abgedreht, wobei ihre Querschnittsdimensionen die Reduktion auf resp. 1,6; 1,2 cm erfuhren, und sodann der Bestimmung des thermischen Leitvermögens unterworfen.

Nachdem also zu den Untersuchungen nur das Mark der Gussstücke verwendet worden ist, waren störende Einflüsse seitens Inhomogenitäten des Materials nicht zu befürchten. Dass solche auch wirklich nur in untergeordnetem Masse vorlagen, beweisen am besten die geringen Abweichungen der jeweilig einander entsprechenden zwei Werte der Dichte, welche ich aus Wägungen und den mittels Kathetometers ausgemessenen Ringdimensionen heraus vor und nach dem zweiten Abdrehen für die fünf untersuchten Metalle ermittelt und in die mit den Überschriften d_1 und d_2 versehenen Kolonnen der nachstehenden Tabelle eingetragen habe.

Den Kupfer- und Zinngehalt der vier Bronzen hat Herr W. Misteli, dipl. Chemiker, festgesetzt. Die aus je zwei übereinstimmenden Analysen gewonnenen Zahlenwerte für die Gewichtsprozente Cu und Sn sind in der folgenden Tabelle verzeichnet. Eine rein qualitative Prüfung des Zinns ergab, dass es nur ganz geringe Spuren von Eisen und Kupfer enthält; auf As und Sb wurde es nicht geprüft. Ich gebe nun im folgenden auch noch den Kupfergehalt in Volum- und Molprozenten an und stelle den Mitteln der beobachteten Dichten die mittels der Gesellschaftsrechnung berechneten Dichten gegenüber, woraus man die Grösse der prozentuellen Kontraktion resp. Dilatation zu erkennen im stande ist.

	Analyse		Cu-Gehalt		d_1	d_2	d beob. bei 14° C	d ber.	Kontraktion	Dilatation
	Sn %	Cu %	Vol.%	Mol.%					%	%
Sn	—	—	0,0	0,0	7,30₀	7,32₂	7,31	—	—	—
$Sn_{90}Cu_{10}$	90,17	9,66	8,15	16,75	7,51₇	7,51₄	7,51₅	7,46	0,67	—
$Sn_{75}Cu_{25}$	75,03	24,90	21,4	38,2	7,85₇	7,87₁	7,86₅	7,71₅	1,88	—
$Sn_{25}Cu_{75}$	24,49	75,64	71,7	85,7	8,88₁	8,89₆	8,89	8,53	4,20	—
$Sn_{10}Cu_{90}$	9,79	90,02	88,15	94,4	8,48₁	8,47₁	8,47₅	8,76₅	—	3,25
[Cu]							[8,92]			

Aus dem Molekularprozentgehalt ist zu ersehen, dass die Bronze $Sn_{90}Cu_{10}$ der Formel Sn_5Cu und diejenige, welche wir mit dem Zeichen $Sn_{25}Cu_{75}$ versehen haben, der Formel $SnCu_6$ des genauesten entspricht.

Die von mir gefundenen prozentuellen Kontraktionen stehen mit den von Kiewiet angegebenen in gutem Einklang. Trägt man diese in Funktion der Gewichtsprozente Kupfer auf, so erhält man eine Kurve, welche bei ca. 55 % und zwischen 90 und 95 % je einen Scheitel hat.

II.

Messung der elektrischen Leitungsfähigkeit.

A. Theorie der Messmethode.

Die elektrische Leitungsfähigkeit der in Ringform vorliegenden Metalle wurde, wie es bereits eingangs erwähnt worden ist, mittels der elektromagnetischen Dämpfungsmethode nach elektromagnetischem Masse ermittelt.

Ich gehe nun daran, eine meinen Versuchsverhältnissen angemessene Entwickelung der im Prinzipe wohlbekannten Messmethode von Wilh. Weber zu geben, und die Entwickelungen vereinfachenden Annahmen und Vernachlässigungen, so weit solche für meine speziellen Versuchsanordnungen statthaft erscheinen, zu erörtern.

Es gilt nun im folgenden das Gesetz der gedämpften Schwingung eingehend zu studieren, welche ein kurzer, dicker, permanenter Magnet in der unmittelbaren Nähe eines in der erdmagnetischen Meridianebene aufgestellten, dicken, metallischen Kreisringes ausführt, sobald ersterer an einem dünnen Faden so aufgehängt ist, dass seine Mitte in die Centrumsnormale des Ringes und seine magnetische Axe dann, wenn sich der Magnet in der Ruhestellung befindet, in den erdmagnetischen Meridian zu liegen kommt.

Denken wir uns nun zu diesem Behufe den dicken Kreisring in unendlich dünne, konzentrische Kreisringe zerlegt. Greifen wir vor der Hand einen einzigen solchen heraus und entwickeln wir den Ausdruck des der Magnetbewegung widerstehenden Drehmomentes, das bei alleiniger Anwesenheit dieses einen linearen Leiters auf den Magneten wirken würde.

Es bedeute M das magnetische Moment des Magneten, v den Winkel, den seine magnetische Axe mit der Centrumsnormale des Ringes zu einem bestimmten Zeitmomente t einschliesst, r den Halbmesser, dq den unendlich kleinen Querschnitt des Kreisringes, d den Abstand seiner Ebene von der Magnetmitte, ω den spezifischen Widerstand der Ringsubstanz; endlich sei das elektromagnetische Potential der ganzen magnetischen Masse in Bezug auf den geschlossenen, linearen und von einem Strome von der Intensität Eins durchflossen gedachten fixen Leiters (das spezifische elektromagnetische Potential jener in Bezug auf diesen) für die zur Zeit t statthabende Stellung des Magneten mit P bezeichnet.

Schwingt der Magnet, so wird im Leiter die EMK:

$$1) \qquad e = \frac{dP}{dt}$$

entwickelt, ein Strom von der Stärke i induziert und während der Zeit dt eine Stromarbeit vom Betrage

$$i\,e\,dt = i\,\frac{dP}{dt}\,dt = i\,dP$$

geleistet.

Ist nun D das im Sinne der abnehmenden v positiv gerechnete Drehmoment, mit welchem der im Ringe entstandene Induktionsstrom auf den Magneten einwirkt, so gilt die Energiegleichung: $i\,dP - D\,dv = 0,$

$$2) \qquad D = i\,\frac{dP}{dv}$$

Ist w der Widerstand und L der Koeffizient der Selbstinduktion des betrachteten Elementarringes, so gilt:

$$e = i\,w + L\,\frac{di}{dt}.$$

Da nun aber der Selbstinduktions-Koeffizient einer linearen, kreisförmigen Strombahn das Produkt aus ihrem Umfange und

einer, wenige Einheiten betragenden Ziffer ist, ihr Widerstand aber den Ausdruck hat: $w = \frac{2\pi r \cdot \omega}{dq}$, so ist

$$\frac{L}{w} = \frac{\text{Ziffer}}{\omega} dq$$

mit dq eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung. Es kann demnach in obiger Gleichung von der Existenz des zweiten Gliedes abgesehen und

$$3) \qquad i = \frac{e}{w}$$

gesetzt werden.

Da wir P in Funktion von v zum Ausdrucke bringen werden, geben wir der Gleichung 2) mittels 1) und 3) die Form:

$$4) \qquad D = \frac{1}{w} \left(\frac{dP}{dv}\right)^2 \frac{dv}{dt}.$$

Um die analytische Herleitung der vor allem zu ermittelnden Funktion P möglichst vereinfachen zu können, wollen wir die erste Annahme treffen, dass die Poldistanz 2 l des zu den Messungen verwendeten Magneten gegenüber dem Ringdurchmesser so klein sei, dass schon $\left(\frac{l}{R}\right)^5$ als eine gegenüber Eins vernachlässigbar kleine Grösse angesehen und demzufolge die ganze magnetische Masse betreffs ihrer Wirkung nach aussen hin durch diejenige zweier, symmetrisch zur Magnetmitte, im gegenseitigen Abstande 2 l gelegener, gleich grosser, ungleichnamiger magnetischer Massenpunkte ersetzt werden dürfe.

Die unter dieser vereinfachenden Annahme gemachten Entwicklungen liefern das Resultat:

$$P = 2\pi M. \frac{r^2}{R^3}\left[p_1 (\cos v) + \frac{1}{3}\frac{l^2}{R^2} p_3 (\cos v) \frac{1}{2}\left(15\frac{d^2}{R^2} - 3\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\frac{l^4}{R^4} p_5 (\cos v) \frac{1}{8}\left(315\frac{d^4}{R^4} - 210\frac{d^2}{R^2} + 15\right)\right],$$

worin

$$R^2 = r^2 + d^2$$

und $p_1, p_3, p_5, \ldots$ die Kugelfunktionen mit dem Argumente cos v bedeuten.

Hieraus folgt:

$$D = \frac{dq}{\omega \cdot 2\pi r}(2\pi M)^2 \frac{r^4}{R^6}\left[1 + \frac{1}{4}\frac{l^2}{R^2}\frac{5d^2 - R^2}{R^2}(15\cos^2 v - 3) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{64}\frac{l^4}{R^4}\frac{21d^4 - 14d^2R^2 + R^4}{R^4}(315\cos^4 v - 210\cos^2 v + 15)\right]$$
$$\sin^2 v \frac{dv}{dt}.$$

Wenn wir nun auf Grund hiervon den Ausdruck des von den elektromagnetischen Kräften auf den Magneten ausgeübten Drehmomentes für den, durch den Halbmesser $r = (r_0 + x)$, den Querschnitt $dq = dx \,.\, dy$ und den von der Magnetmitte gerechneten Abstand $d = (d_0 + y)$ definierten Elementarring anschreiben und über alle möglichen Werte von x und y summieren, so erhalten wir den Ausdruck des resultierenden Drehmomentes D aller elektromagnetischen Kräfte, welche ihren Ursprung dem im ganzen Ringe induzierten elektrischen Strome verdanken. Ist hierbei r_0 der mittlere Halbmesser des Ringes, d_0 der Abstand der Magnetmitte von der Ringmittelebene, und hat der Ring einen rechteckigen Querschnitt, wobei $2h = r_a - r_i$, die Differenz des äusseren und inneren Ringhalbmessers, 2 b die Dicke des Ringes bedeutet, so werden als Integrationsgrenzen für resp. x, y die resp. Wertepaare $(-h, +h)$, $(-b, +b)$ gelten. Bezeichnen wir noch $\rho_0^2 = r_0^2 + d_0^2$.

Das Resultat dieser unter den weiteren vereinfachenden Annahmen vollführten Integrationen, wonach bereits

$$\left(\frac{b}{r_0}\right)^4, \left(\frac{h}{r_0}\right)^4, \left(\frac{d_0}{r_0}\right)^4; \frac{b^2h^2}{r_0^4}, \frac{b^2d_0^2}{r_0^4}, \frac{h^2d_0^2}{r_0^4}; \frac{b^4l^2}{r_0^6}, \frac{h^4l^2}{r_0^6}, \frac{d_0^4l^2}{r_0^6}$$

gegenüber 1 vernachlässigbar kleine Grössen sind, lautet:

$$D = (2\pi M)^2 \frac{2b \,.\, 2h}{2\pi \,.\, \omega} \frac{r_0^3}{\rho_0^6} \left\{ 1 - \left[\frac{b^2 + h^2}{\rho_0^2} + \frac{6h^2}{\rho_0^2} - \frac{h^2}{r_0^2} - 4\frac{r_0^2h^2}{\rho_0^4} \right] - \right.$$

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{\rho_0^2}\left[\frac{r_0^2 - 4d_0^2}{\rho_0^2} + \frac{r_0^2}{\rho_0^2}\left(\frac{8}{3}\frac{h^2}{\rho_0^2} - \frac{5}{3}\frac{b^2}{\rho_0^2}\right) - \frac{13}{3}\frac{h^2}{\rho_0^2} - \frac{4}{3}\frac{b^2}{\rho_0^2}\right](15\cos^2 v - 3)$$

$$\left. + \frac{1}{6}\frac{l^4}{\rho_0^4}\left[\frac{r_0^4 - 8d_0^2r_0^2}{\rho_0^4} - \frac{r_0^2}{\rho_0^2}\left(14\frac{h^2}{\rho_0^2} + \frac{8}{3}\frac{b^2}{\rho_0^2} + \frac{4}{3}\frac{h^2}{\rho_0^2}\right)\right](15\cos^2 v - 3)^2 \right\} \sin^2 v \frac{dv}{dt}.$$

In Anbetracht dessen, dass bei meiner Versuchsanordnung $\frac{d_0}{r_0} \sim \frac{1}{7}$, demzufolge ρ_0 von r_0 nicht mehr als um 2 % verschieden war, fernerhin dass b und h in allen Fällen nur wenig von einander differierten, lässt sich der Ausdruck innerhalb der geschwungenen Klammer ganz erheblich vereinfachen. Gleichzeitig führen wir statt v den von der magnetischen Axe des Magneten mit dem erdmagnetischen Meridian eingeschlossenen Winkel $u = \left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ ein und machen wir auch noch die fernere beschränkende Annahme, dass der Magnet mit so kleinen

Amplituden schwinge, dass $\cos^2 u$ stets durch Eins ersetzt und $\sin^2 u$ gleich Null gesetzt werden könne. Dann gilt:

$$5)\quad \left\{ D = -\left(\frac{2\pi\, r_0^2 M}{\varrho_0^3}\right)\frac{1}{W}\frac{du}{dt}\left\{1 - \frac{b^2+2h^2}{\varrho_0^2} + \frac{3}{2}\frac{l^2}{\varrho_0^2}\frac{r_0^2-4d_0^2-5b^2}{\varrho_0^2} + \frac{3}{2}\frac{l^4}{\varrho_0^4}\frac{r_0^2-8d_0^2-16h^2}{\varrho_0^2}\right\}\right.$$

Es ist also

$$6)\qquad D = -E\frac{du}{dt}.$$

wo E, das auf die Einheit der Winkelgeschwindigkeit bezogene Dämpfungsmoment, durch die Gleichung:

$$7)\qquad E = \left(\frac{2\pi\, r_0^2 M}{\varrho_0^3}\right)^2 \frac{1}{W} f$$

gegeben ist. Hierin bedeutet W den Ohm'schen Widerstand des Metallringes und ist f das Zeichen für den in 5) enthaltenen Klammerausdruck.

Diese Grösse E werden wir nun zur Berechnung des Ringwiderstandes heranziehen, und wollen wir sie deshalb aus der Magnetbewegung heraus abzuleiten suchen.

Es sei nun L das auf die Einheit der Winkelgeschwindigkeit bezogene Dämpfungsmoment des Luftwiderstandes, $\theta u + \theta_1 \frac{du}{dt}$ das Torsionsmoment des Aufhängefadens, H die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Feldstärke und Q das Trägheitsmoment des schwingenden Magneten. Es gilt sodann als Differentialgleichung der Magnetbewegung:

$$Q\frac{d^2u}{dt^2} = -E\frac{du}{dt} - L\frac{du}{dt} - \left(\theta u + \theta_1\frac{du}{dt}\right) - MHu.$$

Bedeutet nun Λ das logarithmische Dekrement der zeitlich abnehmenden Amplituden des gedämpft schwingenden Magneten und T seine Schwingungsdauer, so besteht die Beziehung:

$$8)\qquad E + L + \theta_1 = 2Q\frac{\Lambda}{T}.$$

Um hieraus die zu bestimmen gesuchte Grösse E ermitteln zu können, müssen wir des ferneren eine getrennte Bestimmung von $(L + \theta_1)$ zu ermöglichen suchen.

Ändern wir zu diesem Behufe diesen eben vollführten Versuch dahin ab, dass wir den Ring aus der Umgebung des

Magneten entfernen. Dann wird die schwingende Bewegung des Magneten die durch die Differentialgleichung:

$$Q\frac{d^2u}{dt^2} = -L\frac{du}{dt} - \left(\theta u + \theta_1\frac{du}{dt}\right) - MHu$$

bedingte sein. Es gilt sodann analog dem früheren:

8a) $$L + \theta_1 = 2Q\frac{\Lambda_0}{T_0}.$$

Die Verquickung von 8) und 8a) liefert das Resultat:

9) $$E = 2Q\left(\frac{\Lambda}{T} - \frac{\Lambda_0}{T_0}\right),$$

was mit 7) ergibt:

$$W = \left[\left(\frac{2\pi r_0^2}{\varrho_0^3}\right)^2 f\right]\frac{M^2}{2Q}\frac{1}{\frac{\Lambda}{T} - \frac{\Lambda_0}{T_0}}.$$

Der spezifische Widerstand ω der Ringsubstanz ist sodann:

10) $$\omega = \left[\frac{\pi r_0^3 q}{\varrho_0^6} f\right]\frac{M^2}{Q}\frac{1}{\frac{\Lambda}{T} - \frac{\Lambda_0}{T_0}}.$$

Da nun der Klammerausdruck in 10) eine aus den Ring- und Magnetdimensionen heraus berechenbare Grösse ist, so zerfällt die Aufgabe der Bestimmung von ω lediglich in die zwei Teile: in die Ermittelung von $\frac{M^2}{Q}$ einerseits, in die Bestimmung von Λ, Λ_0, T, T_0 anderseits.

Da nun geschrieben werden kann:

11) $$\frac{M^2}{Q} = \left(\frac{MH}{Q}\right)\frac{M}{H},$$

so zerfällt weiterhin die Aufgabe der Bestimmung von $\frac{M^2}{Q}$ in zwei Unteraufgaben.

Bezüglich des ersten Faktors gilt nun:

12) $$\frac{MH}{Q} = \frac{\pi^2 + \Lambda_0^2}{T_0^2}\frac{1}{1+\vartheta},$$

wo $$\vartheta = \frac{\theta}{MH}.$$

Die noch übrige Bestimmung von $\frac{M}{H}$ geschieht nach der Gauss'schen Methode, wie folgt.

Denken wir uns an der Stelle, wo wir den in unseren Diensten stehenden Magneten bei den früheren Versuchen

schwingen liessen, einen kurzen Hilfsmagneten aufgehängt und ersteren zu diesem in die erste Gauss'sche Hauptdisposition gebracht. Bezeichnen wir mit M das magnetische Moment, 2λ die Poldistanz, ϑ' das Torsionsverhältnis des Hilfsmagneten, mit R den gegenseitigen Abstand der beiden Magnetmitten. Es gilt sodann für die aus dem erdmagnetischen Meridian statthabende stationäre Ablenkung z des Hilfsmagneten unter der Voraussetzung dass diese stets so klein sei, dass $\cos^2 z$ durch Eins ersetzt werden könne, anderseits dass $\left(\frac{l}{R}\right)^4$ und $\left(\frac{\lambda}{R}\right)^4$ gegenüber Eins vernachlässigt werden dürfen, die Gleichung:

$$13)\quad \operatorname{tg} z = 2\frac{M}{H}\frac{R}{(R^2-l^2)^2}\left[1-2\lambda^2\frac{R^2+l^2}{(R^2-l^2)^2}\right]\frac{1}{1+\vartheta'}.$$

Indem wir hieraus den Wert für $\left(\frac{M}{H}\right)$ und aus 12) den Ausdruck von $\left(\frac{MH}{Q}\right)$ in 11) einsetzen, erhalten wir:

$$14)\quad \frac{M^2}{Q} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2+A_0^2}{T_0^2}\frac{1+\vartheta'}{1+\vartheta}\frac{(R^2-l^2)^2}{R}\left[1+2\lambda^2\frac{R^2+l^2}{(R^2-l^2)^2}\right].$$

Da die aus meinen Versuchen für A und A_0 hervorgehenden Werte so klein sind, dass ihre Quadrate π^2 gegenüber verschwinden, so tritt laut der Bedingung:

$$\frac{\pi^2+A_0^2}{T_0^2} = \frac{\pi^2+A^2}{T^2}$$

zu den erwähnten Vereinfachungen noch die weitere hinzu, dass

$$15)\qquad T = T_0 \qquad \text{ist.}$$

Demnach ergibt sich unter den Voraussetzungen, dass

1. a) $\left(\frac{l}{r_0}\right)^5$; $\left(\frac{b}{r_0}\right)^4$, $\left(\frac{h}{r_0}\right)^4$, $\frac{b^2h^2}{r_0^4}$, $\frac{h^4l^2}{r_0^6}$, $\frac{b^4l^2}{r_0^6}$; $\left(\frac{d_0}{r_0}\right)^4$, $\frac{d_0^2b^2}{r_0^4}$, $\frac{d_0^2h^2}{r_0^4}$, $\frac{d_0^4l^2}{r_0^6}$;

   b) $\left(\frac{l}{R}\right)^4$, $\left(\frac{\lambda}{R}\right)^4$ gegenüber Eins bereits vernachlässigbar klein sind;

2. dass die Amplituden des schwingenden Magneten und die Ablenkungswinkel des zur Bestimmung von $\left(\frac{M}{H}\right)$ gebrauchten Hilfsmagneten so klein sind, dass die Quadrate der Cosinuse beider stets durch Eins ersetzt werden dürfen,

für den spezifischen Widerstand der Ringsubstanz der Ausdruck:

$$16)\quad \omega = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^3 r_0^3 q}{\rho_0^6}\,\frac{(R^2-l^2)^2}{R}\,\frac{\operatorname{tg}\varkappa}{A-A_0}\,\frac{1}{T}\,\frac{1+\vartheta'}{1+\vartheta}\left[1+2\lambda^2\frac{R^2+l^2}{(R^2-l^2)^2}\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{b^2+2h^2}{\rho_0^2}+\frac{3}{2}\,\frac{l^2}{\rho_0^2}\,\frac{r_0^2-4d_0^2-5b^2}{\rho_0^2}+\frac{3}{2}\,\frac{l^4}{\rho_0^4}\,\frac{r_0^2-8d_0^2-16h^2}{\rho_0^2}\right].$$

Um mit der geschilderten Messmethode genügend genaue Resultate erzielen zu können, muss man bestrebt sein, die Differenz $A-A_0$ möglichst gross zu machen. Hierzu ist, wie uns dessen 10) belehrt, erforderlich, r_0 klein, q dagegen gross zu machen, einen Magneten von kleinem Trägheitsmoment und — was vor allem hervorzuheben ist, von möglichst grossem magnetischem Momente M zu verwenden. Anderseits müssen der Wahl eines zu grossen q und l und eines zu kleinen r_0 Schranken gesetzt werden, um all' jenen Bedingungen, welche den analytischen Betrachtungen zu Grunde gelegt worden sind, vollends zu entsprechen oder nicht in die Lage zu kommen, eine noch grössere Zahl von Korrekturgliedern im Ausdrucke von ω berücksichtigen zu müssen.

Bei der Beschreibung meiner Versuchsanordnungen werde ich davon Rechenschaft ablegen, wie weit die oben aufgezählten Bedingungen bei meinen Versuchen faktisch eingehalten worden sind.

Die Poldistanz des Magneten.

Den im vorigen gemachten Entwickelungen ist unter anderem die Praemisse zu Grunde gelegt worden, dass der Magnet in seiner Wirkung nach aussen hin durch zwei bestimmt grosse und in einem fixen gegenseitigen Abstande befindliche magnetische Massen ersetzt werden dürfe. Bekanntlich ist aber der Polabstand eines Magneten eine mit der Lage desjenigen Ortes veränderliche Grösse, auf den die äussere Wirkung des Magneten bezogen wird.

Da ich nun bei meinen Versuchen von einem Magneten Gebrauch machte, für welchen die vereinfachende Annahme einer festen Poldistanz nicht genau gültig ist, und anderseits eine ziemlich genaue Kenntnis derselben aus dem Grunde erforderlich war, da das in (16), innerhalb des zweiten Klammerausdrucks

enthaltene Glied mit l^2 den Wert von ω auf mehrere Prozente beeinflusste, so fand ich es für angezeigt, den Ausdruck des spezifischen elektromagnetischen Potentials der kreisförmigen bahn in Bezug auf den Magneten mit Einführung einer mit der Lage des Potentialortes veränderlichen Poldistanz zu entwickeln, um sodann aus jenem den für unseren speziellen Fall gültigen Ausdruck der Poldistanz herzuleiten.

* * *

Denken wir uns den Magneten auf ein orthogonales Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung in die Magnetmitte verlegt werde. Lassen wir die x-Axe mit der magnetischen Axe, die Koordinatenebenen mit den Symmetrieebenen des Magneten zusammenfallen.

Der Ausdruck des magnetischen Potentials Π der ganzen magnetischen Masse in Bezug auf den Ort $(x_1, y_1 z_1)$ ist:

$$\Pi = \int s \, dv \, \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial x},$$

worin s die Intensität der in Richtung der x-Axe statthabenden Magnetisierung an der Stelle des durch die laufenden Koordinaten x, y, z bestimmten Volumenelementes dv und ρ den Abstand des Potentialortes von dv bedeutet.

Entwickelt man nun den Ausdruck von P mittels Einführung von Kugelfunktionen und vereinfacht man ihn gemäss der Voraussetzung, dass der laufende Radius vector r des magnetischen Massenelementes gegenüber demjenigen des Potentialortes r_1 so klein sei, dass man schon $\left(\frac{r}{r_1}\right)^5$ gegenüber Eins vernachlässigen dürfe, so erhält man:

$$(17) \qquad \Pi = M \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{3}{2} \frac{x_1}{r_1^5} \times$$
$$\times \left[\left(5 \frac{x_1^2}{r_1^2} - 3\right) A + \left(5 \frac{y_1^2}{r_1^2} - 1\right) B + \left(5 \frac{z_1^2}{r_1^2} - 1\right) C \right].$$

Hierin bedeutet M das magnetische Moment der ganzen magnetischen Masse für die x-Richtung und ist

$$(18) \qquad \begin{cases} A = \int x^2 \, s \, dv \\ B = \int y^2 \, s \, dv \\ C = \int z^2 \, s \, dv \end{cases}$$

Darf nun der Magnet durch zwei in der x-Axe symmetrisch zur Magnetmitte und im gegenseitigen Abstande 21 liegende, gleich grosse, ungleichnamige magnetische Massen m_+ und m_- ersetzt werden, so muss *II* den weiteren Ausdruck annehmen können:

$$19) \quad II = \frac{2\,ml\,x_1}{r_1^3} + \frac{1}{2}\,2\,ml\,\frac{x_1}{r_1}\,\frac{l^2}{r_1^4}\left(5\,\frac{x_1^2}{r_1^2} - 3\right),$$

und da die beiden Ausdrücke für *II* miteinander identisch sein müssen, so müssen die Beziehungen gelten:

$$20) \quad 1. \quad M = 2\,ml$$

$$21) \quad 2. \quad l^2 = 3\left(\frac{A}{M} + \frac{5\,y_1^2 - r_1^2}{5\,x_1^2 - 3\,r_1^2}\,\frac{B}{M} + \frac{5\,z_1^2 - r_1^2}{5\,x_1^2 - 3\,r_1^2}\,\frac{C}{M}\right).$$

Da nun aber das magnetische Moment

$$22) \quad M = \int s\,dv$$

ist, somit eine von dem Potentialorte (x_1, y_1, z_1) vollkommen unabhängige, allein durch die Beschaffenheit des Magneten bedingte Grösse ist, so muss es auch das Produkt ml laut der Definitionsgleichung (20) sein. Demnach sind m und l mit dem Potentialorte derart veränderliche Grössen, dass sie der Gleichung:

$$2\,ml = M = \text{const.}$$

stets genügen.

Aus (21) folgt nun in Bezug auf einen kurzen, dicken Magneten, also einen solchen, für welchen $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ nicht sehr kleine Grössen sind, dass das l^2 einen vom Potentialorte unabhängigen Wert nur dann haben kann, wenn $B = C$ ist, was bei einem homogen magnetisierten Magneten parallelepipedischer Form darauf hinaus kommt, dass sein Querschnitt quadratisch ist. Dies traf bei meinem Magneten nicht zu, da seine Höhe 19 mm und seine Dicke 24 mm betrug.

* * *

Entwickeln wir nun den Ausdruck des spezifischen elektromagnetischen Potentials P des aus seiner Ruhelage um den Winkel $u = \frac{\pi}{2} - v$ abgelenkten Magneten in Bezug auf eine mit der erdmagnetischen Meridianebene parallele kreisförmige Strombahn vom Radius r, in deren Zentrumsnormalen im Abstande d von jener die Magnetmitte liegt.

Legen wir durch das Magnetzentrum ein fixes orthogonales Koordinatensystem so, dass die $(\xi\,\eta)$-Ebene der Ebene des Leiters parallel werde, die η-Axe mit der Zentrumsnormalen der Strombahn und die ζ-Axe mit der z-Axe des im vorigen eingeführten und mit dem Magneten mitschwingenden (x, y, z)-Koordinatensystems koïncidiere.

Wir legen nun durch die kreisförmige Strombahn, mit der Magnetmitte als Zentrum eine Kugelfläche vom Radius $R = \sqrt{r^2 + d^2}$, um von den durch die Strombahn begrenzten zwei Kugelkalotten diejenige, welche jenseits des Magneten liegt, als Stromfläche zu benützen.

Führen wir sphaerische Koordinaten ein, so werden die Descartes'schen Koordinaten eines Punktes der Kugelfläche lauten:

$$\begin{aligned} \xi &= R \sin\varphi \cos\psi \\ \eta &= R \cos\varphi \\ \zeta &= R \sin\varphi \sin\psi. \end{aligned}$$

Der Ausdruck des Potentials des einen, etwa positiven Magnetpols ist nun:

$$P_{+m} = \int m\, df\, \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial R},$$

wo df ein Flächenelement der Stromfläche und ρ dessen Abstand vom Magnetpole bedeutet. Es ist nun:

$$df = R\, d\varphi\, R \sin\varphi\, d\psi$$

und

$$\frac{1}{\rho} = \left[1 - \frac{l}{R}\cos w + \frac{l^2}{R^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2 w - \frac{1}{2}\right) - \right.$$
$$\left. + \frac{l^3}{R^3}\left(\frac{5}{2}\cos^3 w - \frac{3}{2}\cos w\right) + \ldots\right],$$

wenn

$$\cos w = \cos\varphi \cos v + \sin\varphi \sin v \cos\psi.$$

Nun ist

$$P = P_{+m} + P_{-m},$$

die Summe der Potentiale der beiden Magnetpole, wo

$$P_{+m} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_1} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} m \left[1 + 2\frac{l}{R} p_1 (\cos w) + \frac{3}{2}\frac{l^2}{R^2} p_2 (\cos w) + \right.$$
$$\left. + 4\frac{l^3}{R^3} p_3 (\cos w) + \ldots\right] \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi,$$

$$P_{-m} = \int_{\varphi=o}^{\varphi=\varphi_1} \int_{\Psi=o}^{2\pi} (-m)\Big[1 - 2\frac{l}{R} p_1(\cos w) + \frac{3}{2}\frac{l^2}{R^2} p_2(\cos w) - \\ - 4\frac{l^3}{R^3} p_3(\cos w) + \ldots\Big] \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi.$$

Hierin sind $p_1(\cos w)$, $p_2(\cos w)$, $p_3(\cos w)$, ... Zeichen für die Kugelfunktionen des Argumentes w und ist φ_1 bestimmt durch:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{r}{d}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun mit Berücksichtigung dessen, dass die mit φ und ψ variablen Grössen l und m stets Gleichung 20) befriedigen:

$$23) \quad P = 2\frac{M}{R} \int_{\varphi=o}^{\varphi=\varphi_1} \int_{\Psi=o}^{\Psi=2\pi} \Big[p_1(\cos w) + 2\frac{l^2}{R^2} p_3(\cos w) + \\ + 3\frac{l^4}{R^4} p_5(\cos w) + \ldots\Big] \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi.$$

Hierin wird das erste Glied von der Variation von l nicht beeinflusst und liefert nach vollführten Integrationen das Resultat:

$$[1] \quad 2\frac{M}{R} 2\pi \cos v \int_o^{\varphi_1} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi M r^2}{R^3} \cos v.$$

Die weiteren Glieder in (23) enthalten l^2 und ist für letzteres auf Grund der Transformationsgleichungen:

$$x = \xi \sin v + \eta \cos v$$
$$y = \eta \sin v - \xi \cos v$$
$$z = \zeta$$

zu setzen:

$$l^2 = 3\Big[\frac{A}{M} + \frac{B}{M}\frac{5(\cos\varphi \sin v - \sin\varphi \cos v \cos\psi)^2 - 1}{5(\cos\varphi \cos v + \sin\varphi \sin v \cos\psi)^2 - 3} + \\ + \frac{C}{M}\frac{5\sin^2\varphi \sin^2\psi - 1}{5(\cos\varphi \cos v + \sin\varphi \sin v \cos\psi)^2 - 3}\Big].$$

Glied [2] in (23) liefert nun folgenden Wert seines bestimmten Integrals:

$$[2] = \frac{2\pi M r^2}{R^5} \frac{1}{4} \cos v \,(5\cos^2\varphi_1 - 1)\left[3\frac{A}{M}(5\cos^2 v - 3) - \right.$$
$$\left. - 3\frac{B}{M}(5\cos^2 v - 4) - 3\frac{C}{M}\right].$$

Von der Entwicklung des dritten Gliedes habe ich abgesehen, da es bereits von ganz untergeordneter Bedeutung ist. Demnach gewinnen wir für P den Ausdruck:

$$24)\quad P = \frac{2\pi M r^2}{R^3}\left[1 + \frac{1}{4}\left\{3\frac{A}{M}(5\cos^2 v - 3) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 3\frac{B}{M}(5\cos^2 v - 4) - 3\frac{C}{M}\right\}\frac{1}{R^2}(5\cos^2\varphi_1 - 1) + \ldots\right]\cos v,$$

während man unter Voraussetzung einer konstanten Poldistanz findet:

$$P = \frac{2\pi M r^2}{R^3}\left[1 + \frac{1}{4}\frac{l^2}{R^2}(5\cos^2\varphi_1 - 1)(5\cos^2 v - 3) + \ldots\right]\cos v.$$

Indem wir nun die beiden Ausdrücke für P miteinander indentifizieren, erhalten wir für l^2 folgende Gleichung:

$$25)\quad l^2 = 3\frac{A}{M} - 3\frac{B}{M}\frac{5\cos^2 v - 4}{5\cos^2 v - 3} - 3\frac{C}{M}\frac{1}{5\cos^2 v - 3}.$$

In Anbetracht dessen, dass wir nur sehr kleine Ablenkungen des Magneten zulassen, sodass v angenähert gleich $\frac{\pi}{4}$ ist und $\cos^2 v$ gleich Null gesetzt werden darf, können wir nun (25) vereinfachen und schreiben:

$$26)\quad l^2 = 3\frac{A}{M} - 4\frac{B}{M} + \frac{C}{M}.$$

Für den Fall, dass B = C ist, resultiert hieraus die schon von vorne herein bekannt gewesene Beziehung:

$$l^2 = 3\frac{A - B}{M}$$

Gleichung (26) liefert uns also einen Spezialwert der Poldistanz, welcher, weil er aus der Integralwirkung der kreisförmigen Strombahn auf den Magneten abgeleitet worden ist, als Mittelwert der Poldistanz in Bezug auf den kreisförmigen Leiter anzusehen ist.

An einem späteren Orte werde ich zahlenmässig darzutun Gelegenheit haben, dass die Kenntnis dieser »mittleren Poldistanz» unentbehrlich notwendig war.

B. Beschreibung der Versuche.

1. *Versuchsanordnung und Messmethoden zur Bestimmung der logarithmischen Decremente und der Schwingungsdauer.*

Versuchsanordnung.

Der jeweilen zur Untersuchung gelangende Ring wurde auf einen fixen, cylindrischen Holzrahmen, dessen Mittelebene vertikal und parallel dem erdmagnetischen Meridian stand, genau centrisch und jener parallel so aufgesetzt, dass die der Mittelebene des Holzringes zugekehrte Basisfläche des Ringes jedesmal um 4,0 mm von jener entfernt war.

Im Innern dieses Holzringes, der behufs Vermeidung von Luftströmungen mit zwei Seitenwänden versehen und auf diese Weise zu einem geschlossenen Kasten gestaltet worden war, hing der Magnet. Letzterer, ein Parallelepipedon von 50 mm Länge, 19 mm Höhe und 24 mm Breite war ein Bündel von 12 Stabmagneten, à 50 mm Länge, ca. 3 mm Höhe und 12 mm Breite, das durch eine messingene Hülse zusammengehalten wurde. Auf dieser war ein Spiegel in einer mit der Längsaxe des Magneten parallelen Stellung befestigt. Zur Aufhängung des Magneten diente ein an einem Torsionskopfe befestigter Constantandraht von 0,2 mm Dicke und fast 2,5 m Länge. Zu dessen Schutze gegen Luftströmungen diente eine oben zugedeckte Messingröhre, an welche ein bis zum Holzrahmen reichendes enges Glasrohr angeschlossen war. Der Holzring hatte in seiner halben Höhe eine radiale Bohrung, durch welche der Aufhängefaden in den Hohlraum eintrat. Es wurde stets dafür gesorgt, dass die Magnetmitte in die Zentrumsnormale des Ringes zu liegen komme, und dass der Aufhängefaden dann, wenn sich der Magnet in der Ruhestellung befand, torsionsfrei sei.

Da im Mittel

$$r_0 = 9{,}0 \text{ cm}, \quad b = 0{,}85 \text{ cm}, \quad h = 0{,}8 \text{ cm}, \quad d_0 = 1{,}3 \text{ cm},$$

und

$$l_0 = 1{,}80 \text{ cm}$$

war, so gilt:

$$\left(\frac{l}{r_0}\right)^5 \sim \frac{1}{3100}; \left(\frac{h}{r_0}\right)^4 < \frac{b^2h^2}{r_0^4} < \left(\frac{b}{r_0}\right)^4 \sim \frac{1}{12500};$$

$$\frac{h^4l^2}{r_0^6} < \frac{b^4l^2}{r_0^6} \sim \frac{1}{320000}; \frac{d_0^2h^2}{r_0^4} < \frac{d_0^2b^2}{r_0^4} < \frac{d_0^4}{r_0^4} \sim \frac{1}{3900}; \frac{d_0^4l^2}{r_0^6} \sim \frac{1}{60000}.$$

Hiermit ist der Beweis erbracht, dass die auf Seite 19 sub 1a aufgezählten Bedingungen hinreichend eingehalten waren.

Auf Grund obiger Zahlenangaben erhält man:

$$\frac{b^2+2h^2}{\rho_0^2} = 0{,}024.$$

$$\frac{3}{2}\frac{l^2}{\rho_0^2}\cdot\frac{r_0^2-4d_0^2-5b^2}{\rho_0^2} = 0.053$$

$$\frac{3}{2}\frac{l^4}{\rho_0^4}\cdot\frac{r_0^2-8d_0^2-16h^2}{\rho_0^2} = 0{,}002.$$

Wir gewinnen hieraus die Überzeugung, dass wir in unseren Ableitungen bei der Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung keine weiteren Konzessionen hätten zulassen dürfen, ohne dabei zu riskieren, dass die Messresultate von den wahren absoluten Werten viel zu abweichend resultierten. Die Berücksichtigung des dritten Gliedes erscheint auch noch gerechtfertigt.

Da der Abstand der Scala vom Spiegel 2300 mm betrug und die Schwingungsbeobachtungen bei einem Höchstwerte des Ausschlags von im Mittel 350 mm begonnen wurden, so war der grösste aller maximalen Ausschlagswinkel etwa 4,3°, so dass das minimum minimorum aller cosu ungefähr 0,997 betrug und der für die Dauer einer Schwingung genommene Mittelwert von $\cos^2 u$ bei der maximalen aller beobachteten Amplituden von 1 nicht mehr als um $^1/_2$ ‰ verschieden war.

Messverfahren.

Die behufs Ermittelung von A und A_0 angestellten Beobachtungen geschahen derart, dass jedesmal durch 21′ hindurch folgeweise 6 unmittelbar aufeinanderfolgende maximale Ausschläge des in Schwingung versetzten Magneten beobachtet, 4 weitere zwecks Gewinns von Ruhepausen unbeachtet gelassen wurden. Nachdem die Schwingungsdauer des Magneten ca. 6″ betrug, wurden demnach in jeder Minute 6 Ablesungen gemacht.

So konnte innerhalb 21′ viel Beobachtungsmaterial aufgespeichert werden, das allgemein durch die Ablesungsreihe:

0′	σ_0	σ_1	.	.	.
	σ_2	σ_3	.	.	.
	σ_4	σ_5	.	.	.
	—	—	.	.	.
	—	—	.	.	.
1′	σ_{10}	σ_{11}	20′	σ_{200}	σ_{201}
	σ_{12}	σ_{13}		σ_{202}	σ_{203}
	σ_{14}	σ_{15}		σ_{204}	σ_{205}
	—	—			
	—	—			

dargestellt sei.

Aus den nach dem Bogen reduzierten Werten σ' der Ausschläge erhält man die relativen Werte der doppelten Bögen:

$$s_1 = \sigma_1' - \sigma_0'$$
$$s_2 = \sigma_3' - \sigma_2'$$
$$\vdots$$
$$s_{201} = \sigma_{201}' - \sigma_{200}$$
$$\vdots$$

und als Werte des gesuchten logarithmischen Dekrementes, indem man je n Schwingungen zusammenfasst:

$$\Delta = \frac{1}{n} \lg \left(\frac{s_1}{s_{n+1}}\right) = \frac{1}{n} \lg \left(\frac{s_2}{s_{n+2}}\right) = \frac{1}{n} \lg \left(\frac{s_3}{s_{n+3}}\right) = \ldots$$

Es wurde $n = 100$ genommen.

Die Schwingungsdauer des Magneten wurde in folgender Weise ermittelt: Nachdem das Fernrohr so eingestellt worden war, dass die Ausschläge nach beiden Seiten hin gleich gross waren, wurden jedesmal, wenn das Fadenkreuz die Zahlenreihe der Skala im Sinne der anwachsenden Zahlen passierte, diejenigen in der Umgebung des mittleren Teilstrichs liegenden 2 Scalenteile notiert, welche in den Momenten zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Sekundenschläge einer Pendeluhr mit dem vertikalen Strich des Fadenkreuzes zu koïncidieren schienen.

Nachdem die Bewegung des Magneten zur Zeit, als er die Nullstellung passiert, eine angenähert gleichförmige ist, so ist

die Differenz der jeweilig beobachteten zwei Skalenteile ein Mass der Geschwindigkeit des Magneten in jener Stellung. Demnach kann aus den beobachteten Zeiten und jenen zwei Skalenteilen heraus der Zeitpunkt, in welchem das Fadenkreuz den mittleren Teilstrich der Skala passierte, d. h. der Magnet in der Nullstellung sich befand, durch Interpolation bestimmt werden.

Die genannten Beobachtungen wurden minutlich dreimal gemacht; zweimal wurde pausiert. In dieser Weise wurde 11 Minuten lang beobachtet.

Indem man die Differenz zweier um 50 Schwingungen von einander getrennter Durchgangszeiten bildet, erhält man durch Division mit 50 die gesuchte Schwingungsdauer. Da die diesbezüglichen Beobachtungen bei maximalen Ausschlägen von 100—120 mm gemacht wurden, war eine Reduktion der Schwingungsdauer auf die Amplitude Null überflüssig. Der Gang der zur Zeitmessung gebrauchten Uhr war auf dem Wege des Vergleichs mit einem Chronometer als verschwindend klein gefunden worden.

Die Aufeinanderfolge der innerhalb einer Versuchsreihe gemachten Bestimmungen von A, A_0 und T war im allgemeinen:

T, A_0, A, A_0, (T), A, A_0, T.

Bei der Untersuchung der Bronzen $Sn_{25}\,Cu_{75}$ u. $Sn_{10}\,Cu_{90}$, für welche A viel kleiner resultierte, als für die andern 3 Metalle, wurden obiger Reihe zwecks Erzielung zuverlässiger Resultate noch 1—2 weitere Reihen für A und ebenso für A_0 angefügt.

Es wurde stets dafür gesorgt, dass die Temperatur des Versuchsraumes während Ausführung einer Versuchsreihe angenähert konstant bleibe. In unmittelbarer Nähe des Versuchsapparates wurde die Lufttemperatur regelmässig gemessen, nach Massgabe welcher später noch zu erörternde Temperaturreduktionen gemacht wurden.

2. *Versuchsanordnung und Messmethode zur Bestimmung des magnetischen Momentes des Magneten.*

a) Bestimmung von $\left(\frac{MH}{Q}\right)$.

Dieser eine Teil der zur Bestimmung von M dienenden Messungen ist der Hauptsache nach mit der bereits behandelten Messung von T erledigt. Es bleibt nur noch übrig, das Torsionsverhältnis ϑ experimentell zu bestimmen. Zu diesem Behufe wurde der Aufhängefaden des Magneten mittelst des Torsionskopfes um den Winkel 60^0 resp. 90^0 abwechselnd im einen und anderen Sinne 3—5 mal gedrillt, und wurden die dadurch bedingten Verdrehungswinkel v des Magneten resp. die denen entsprechenden Ausschläge s notiert. Aus dem mittleren s und dem Torsionswinkel α lässt sich ϑ kraft des Zusammenhangs:

$$\vartheta = \frac{\sin v}{\alpha - v}$$

berechnen.

b) Bestimmung von $\frac{M}{H}$.

Aus Gleichung (13) folgt für $\frac{M}{H}$ der vereinfachte Ausdruck:

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} R^3 \operatorname{tg} z.$$

Wie hieraus ersichtlich ist, wird die Zuverlässigkeit der gemessenen Werte von $\frac{M}{H}$ in erster Linie durch die Genauigkeit der Messung von R bedingt. Desshalb wurde auch auf die exakte Bestimmung von R ein besonderes Augenmerk gerichtet.

Da die Stellung des wenig zugänglichen Hilfsmagneten nicht mit hinreichender Genauigkeit festgestellt werden konnte und die Möglichkeit der genauen direkten Bestimmung von R hieran scheiterte, so wurde der Magnet von zwei Stellungen, einmal westlich, das andere mal östlich vom Hilfsmagneten, in ungefähr gleichen Abständen, auf diesen einwirken gelassen. Die Hälfte des gegenseitigen Abstandes der zwei Lagen, die das Magnetzentrum in den beiden Stellungen eingenommen hat, ist nun dasjenige R, welches mit dem Mittel der so gewonnenen 2 Ablenkungen des Hilfsmagneten korrespondiert. Es wurde hierbei naturgemäss darauf gesehen, die beiden Aus-

schläge von einander womöglich wenig different zu erhalten, d. h. die Abstände der Magnetmitte vom Zentrum des Hilfsmagneten in allen Fällen paarweise gleich zu machen.

Um die Fehler zu eliminieren, die daraus entspringen, dass die magnetische Axe des Magneten mit der geometrischen nicht genau koïncidiert, und dass die Verbindungslinie der Magnetmitten nicht genau senkrecht zum erdmagnetischen Meridian steht, wurde der Magnet in jeder der zwei Lagen noch um 180° gedreht, und zwar so, dass dabei die Lage des Magnetzentrums unverändert blieb, und wurden also in beiden Stellungen des Magneten Ablenkungen des Hilfsmagneten nach beiden Seiten hin bewirkt.

So erhielt man für jedes R vier Gruppen von Ablenkungen $\varkappa$, deren Mittel man nahm; man machte in jedem Falle 3 Beobachtungsreihen für 3 verschiedene Werte von R, und zwar für R = 40, 45 und 50 cm.

Um nun die Abstände 2 R genau messen zu können, wurde folgende Anordnung getroffen: Es wurde ein Holzbalken mit zwei längs desselben verschiebbaren Klötzen verwendet, deren Einstellung durch Indizes an einer am Balken fixierten und mittelst Kathetometers ausgemessenen mm-Skala angegeben wurde. Auf diesen Klötzen wurde ein Schlitten, auf den der Magnet fix aufgesetzt worden war, so situiert, dass die Mittellinie des Schlittens und damit gleichzeitig die Magnetmitte in die zur Balkenrichtung senkrechte Mittelebene des Klotzes zu liegen kam. Die Transportation und die Verdrehung des Magneten um 180° wurde durch ähnliche, am Schlitten ausgeführte Evolutionen ersetzt. Hierdurch ist erreicht worden, dass die Mitte des Magneten nach seiner Drehung um 180° keine Lagenänderung erlitt.

Als Hilfsmagnet wurde ein kleiner, an einem Coconfaden aufgehängter, innerhalb eines eisenfreien Kupferdämpfers beweglicher Ringmagnet von 20,5 mm äusserem Durchmesser verwendet. Er wurde genau auf die Mitte des Balkens gesetzt. Seine Poldistanz 2λ wurde zu $^5/_6$ seiner Länge, also gleich 17 mm angenommen.

Die Ablenkungen der Magnetnadel wurden mit Fernrohr Spiegel und Skala beobachtet.

Das Torsionsverhältnis ϑ' wurde in analoger Weise bestimmt, wie ϑ.

Nach jeder Versuchsreihe für A, A_0 und T wurde ein Versuch zur Bestimmung von $\frac{M}{H}$ vollführt.

---

3. *Wiedergabe einer Versuchsreihe.*

Untersuchungsobjekt: Zinnring.

I. Bestimmung von A, A_0, und T.

Distanz: Skala-Spiegel = 2300 mm; Ruhelage: 600,0.

1.) T.

Ordnungszahl der Schwingung	Zeit	Temp.	Ablesungen an der Skala		Durchgangszeit	50 T.
1	2h 0′ 31″	13.°95	569	621	2h 0′ 31.″61	
3			594	646	43. 11	
5			562	609	54. 81	
11	1′ 29″		574	624	1′ 29.″52	
13			597	648	41. 06	
15			568	614	52. 70	
21	2′ 27″	13.°94	579	628	2′ 27.″43	
23			549	601	38. 98	
25			572	620	50. 60	
31	3′ 25″		584	634	3′ 25.″32	
33			553	605	36. 90	
35			576	625	48. 49	
41	4′ 23″	13.°93	589	638	4′ 23.″22	
43			560	610	34 60	
45			580	629	46. 41	
51	5′ 21″		593	642	5′ 21.″14	289.″53
53			565	613	32. 73	62
55			585	633	44. 31	50
61	6′ 19″	13.°92	599	649	6′ 19.″02	50
63			571	617	30. 65	59
65			591	638	42. 19	49
71	7′ 16″		558	610	7′ 16.″82	39
73			575	621	28. 54	56
75			595	644	40. 10	50

Ordnungszahl der Schwingung	Zeit	Temp.	Ablesungen an der Skala		Durchgangszeit	50 T.
81	8′ 14″	13.°92	563	615	8′ 14.″88	289,″56
83			581	624	26. 44	54
85			599	647	38. 02	53
91	9′ 12″		569	621	9′ 12.″74	52
93			587	631	24. 27	67
95			557	604	35. 91	50
101	10′ 10″	13.°91	573	626	10′ 10.″63	49
103			592	633	22. 19	46
105			562	611	33. 77	46
		t_m = 13,°93			Mittel:	289,″523

T = 5,″7905.

2.) Δ_0.

Ordnungszahl der Schwingung	Zeit	Temp.	Umkehrpunkte		s	log s	Δ log s für 100 Schwingungen
1	2h 12′ 46″	13.°92	365.8	833.0	465.7	2,66811	
3			365.9	832.6	465.2	764	
5			366.0	832.7	465.2	764	
11	13′ 44″		367.0	831.0	462.5	511	
13			367.7	830.3	461.1	380	
15			367.8	830.3	461.0	370	
21	14′ 42″	13.°90	368.6	829.7	459.6	238	
23			368.5	829.0	459.0	181	
25			368.8	828.8	458.5	134	
31	15′ 40″		369.2	828.0	457.3	020	
33			369.5	828.0	457.0	2,65992	
35			369.7	827.8	456.6	954	
41	16′ 38″	13.°90	371.6	826.2	453.2	629	
43			371.7	826.2	453.1	619	
45			372.0	826.0	452.5	571	
51	17′ 36″		373.3	825.0	450.1	331	
53			373.5	824.7	449.8	302	
55			373.8	823.8	448.6	186	

Ordnungszahl der Schwingung	Zeit	Temp.	Umkehrpunkte		s	log s	Δ log s für 100 Schwingungen
61	2h 18′ 34″	13.°90	375.0	823.0	446.8	2,65011	
63			376.0	822.8	445.5	2,64885	
65			376.3	822.5	444.9	826	
71	19′ 32″		376 5	820.7	442.9	631	
73			376.5	820.5	442.7	611	
75			376.7	820.0	442.0	542	
81	20′ 30″	13.°88	376.8	819.8	441.7	513	
83			377.1	819.4	441.0	444	
85			377.4	819.2	440.5	395	
91	21′ 27″		378.1	818.0	438.6	207	
93			378.5	818.0	438.3	177	
95			378.4	817.4	437.8	128	
101	22′ 25″	13.°87	378.9	817.5	437.4	088	0,0272
103			379.1	817.4	437.1	058	271
105			379.4	817.0	436.4	2,63988	277
111	23′ 23″		379.8	816.5	435.5	899	261
113			380.2	815.8	434.4	789	259
115			381.2	815.9	433.5	699	267
121	24′ 21″	13.°86	382.3	815.2	431.7	518	272
123			382.1	815.0	431.7	518	266
125			382.8	814.9	431.0	448	269
131	25′ 19″		383.6	813.4	428.7	215	280
133			383.8	813.4	428.5	195	280
135			384.0	813.0	427.9	134	282
141	26′ 17″	13.°86	385.6	812.0	425.3	2,62870	276
143			385.8	811.4	424.5	788	283
145			386.0	811.3	424.2	757	281
151	27′ 15″		386.5	810.2	422.6	593	274
153			386.7	810.2	422.4	572	273
155			387.0	810.0	421 9	521	267
161	28′ 13″	13.°84	388.2	808.0	418.7	190	282
163			388.7	808.1	418.3	149	273
165			389.0	808.0	417.9	107	272
171	29′ 11″		389.4	806.3	415.8	2,61888	274
173			390.0	806.1	415.0	805	281
175			389.9	805.8	414.8	784	276

Ordnungszahl der Schwingung	Zeit	Temp.	Umkehrpunkte		s	log s	Δ log s für 100 Schwingungen
181	2h 30′ 9″	13.°84	390.7	805.6	413.8	2,61679	0,0283
183			390.8	805.4	413.5	648	280
185			390.9	805.2	413.2	616	276
191	31′ 7″		391.5	804.5	412.0	490	272
193			391.5	804.2	411.7	458	272
195			391.8	804.0	411.2	405	272
201	32′ 5″	13.°82	392.0	803.2	410.2	300	279
203			392.0	803.0	410.0	278	278
205			392.0	802.5	409.5	225	278
		$t_m = 13,^{0}87$				Mittel:	0,0274
						$100\,\Delta_0 = 2{,}303\,.\,0{,}0274$	

$$\Delta_0 = 0{,}000631.$$

3.) Δ.

Ordnungszahl der Schwingung	Zeit	Temp.	Umkehrpunkte		s	log s	Δ log s für 100 Schwingungen
1	2h 44′ 16″	13.°80	290.8	911.6	617.3	2,79050	
3			294.0	908.6	611.2	78618	
5			296.6	905.0	605.1	78183	
11	45′ 14″		306.9	894.6	584.7	76693	
13			309.8	891.5	578.8	76253	
15			312.8	888.4	572.9	75808	
21	46′ 12″	13.°75	322.9	878.1	552.7	74249	
23			325.3	875.3	547.6	73846	
25			328.3	872.4	541.8	73384	
31	47′ 10″		337.0	863.0	523.9	71925	
33			340.2	860.0	517.8	71416	
35			343.0	857.4	512.6	70969	
41	48′ 8″	13.°74	351.6	848.3	494.9	69452	
43			354.2	845.0	489.1	68940	
45			356.9	841.9	483.3	68422	
51	49′ 6″		365.0	834.2	467.8	67006	
53			367.9	830.8	461.4	66408	
55			370.3	827.9	456.2	65916	

Ordnungszahl der Schwingung	Zeit	Temp.	Umkehrpunkte		s	log s	Δ log s für 100 Schwingungen
61	2h 50′ 4″	13.°74	378.1	820.9	441.6	2,64503	
63			381.4	818.2	435.6	63909	
65			382.9	815.8	431.7	63518	
71	51′ 2″		391.2	809.0	416.5	61962	
73			393.2	806.0	411.7	61458	
75			396.0	803.8	406.7	60927	
81	52′ 0″	13.°74	401.7	797.2	393.5	59494	
83			405.8	794.0	387.2	58794	
85			408.2	791.7	382.5	58263	
91	52′ 58″		413.3	787.4	373.3	57206	
93			415.0	785.0	369.1	56714	
95			418.0	783.0	364.3	56146	
101	53′ 56″	13.°73	423.5	776.8	352.6	54728	0,2432
103			425.0	774.9	349.2	54307	31
105			427.0	773.0	345.4	53832	35
111	54′ 54″		433.1	767.0	333.3	52284	41
113			435.5	765.0	328.9	51706	55
115			437.4	763.7	325.8	51295	51
121	55′ 52″	13.°72	441.9	757.9	315.5	49900	35
123			443.9	756.1	311.8	49388	46
125			445.4	753.7	307.8	48827	56
131	56′ 50″		450.2	750.2	299.6	47654	27
133			452.4	748.8	296.0	47129	28
135			454.0	746.6	292.2	46568	40
141	57′ 48″	13.°72	458.7	742.2	283.1	45194	26
143			460.7	740.4	279.3	44607	33
145			462.6	739.5	276.6	44185	24
151	58′ 46″		466.4	734.8	268.1	42830	18
153			467.9	733.4	265.2	42357	05
155			469.7	732.0	262.0	41830	09
161	59′ 44″	13.°72	473.7	727.1	253.1	40329	17
163			474.7	725.1	250.1	39811	10
165			475.5	722.5	246.8	39235	28
171	3h 0′ 42″		480.8	719.7	238.7	37785	18
173			482.0	717.9	235.7	37236	22
175			484.1	716.9	232.6	36661	27

Ordnungszahl der Schwingung	Zeit	Temp.	Umkehrpunkte		s	log s	Δ log s für 100 Schwingungen
181	3h 1′ 40″	13.°70	487.5	712.5	224.8	2,35180	0,2431
183			489.0	711.1	221.9	34616	18
185			489.8	709.6	219.6	34163	10
191	2′ 38″		493.5	706.7	213.0	32838	37
193			494.8	706.2	211.2	32469	25
195			496.2	705.0	208.6	31931	21
201	3′ 36″	13.°69	498.5	701.2	202.6	30664	06
203			499.1	699.4	200.2	30146	16
205			500.3	698.3	197.9	29645	19
		t_m=13,°73				Mittel:	0,24266

$100\ \Delta = 2{,}303.\ 0{,}2427$

$\Delta = 0{,}005589.$

Hierauf folgen vier weitere, den früheren analoge Beobachtungsreihen behufs Bestimmung von

4.) A_0,
5.) A,
6.) α_0,
7.) T.

Nachdem schon allein die obigen drei Zahlenreihen ein hinreichend umfassendes Bild dieser Versuche geben und vermöge der entsprechenden Wahl dieses Exempels durch sie der Gang eines Versuchs mittlerer Güte veranschaulicht wird, so erscheint die ausführliche Mitteilung der übrigen vier Beobachtungsreihen als durchaus überflüssig, und vermerke ich deshalb allein ihre Endergebnisse, bezüglich welcher auf die hier folgende Zusammenstellung verwiesen sei.

Zusammenfassung der Resultate dieser Versuchsreihe.

t = 13,°93 . . T = 5,″7905	t = 13,°73 A = 0,005589
13,°50 5,″7891	13,°68 0,005600
t = 13,°71 . . T = 5,″7898	**t = 13,°71 . . A = 0,005595**

t = 13,°87 . . A_0 = 0,000631
13,°63 0,000653
13,°86 0,000634
t = 13,°79 . . A_0 = 0,000639

II. Beobachtungen zur Bestimmung von $\frac{M}{H}$.

Stellung des Hilfsmagneten bei 700.0. Ruhelage 600.0.

Temp.	Magnet westl. vom Hilfsmagneten: Lage des Magnetzentrums	Ablesungen: Lage N ← S	Ablesungen: Lage S → N	Magnet östl. vom Hilfsmagneten: Lage des Magnetzentrums	Ablesungen: Lage N ← S	Ablesungen: Lage S → N
			1.) R ~ 40 cm.			
18.°08			748.6		450.7	
		451.4	748.5		450.7	748.9
		451.4	748.4		450.9	749.1
		451.2	748.4		450.8	748.9
		451.3	748.5		450.8	748.8
18.°12	249.9	451.2	748.4	1249.9	450.8	748.8
		451.2	748.4		450.7	748.8
		451.3	748.5		450.8	748.9
		451.3	748.4		450.7	748.8
18.°15		451.3	748.45		450.75	748.9
	$2\,s'_1 = 297.15$; $s'_1 = 148.6$			$2\,s''_1 = 298.15$; $s''_1 = 149.1$		
	$R_1 = 50.00$ cm ... $s_1 = 148.85$ mm.					
			2.) R ~ 45 cm.			
18.°20		396.0				805.9
		395.9	804.8		394.2	805.9
		396.0	804.8		394.4	806.1
		395.9	804.7		394.2	806.0
		396.0	805.0		394.3	805.9
18.°22	299.9	396.2	805.0	1199.85	394.2	805.9
		396.1	804.9		394.3	805.8
		396.1	804.9		394.3	805.9
		396.2	804.9		394.3	806.0
18.°23		396.05	804.9		394.25	805.9
	$2\,s'_2 = 408.85$; $s'_2 = 204.4$			$2\,s''_2 = 411.65$; $s''_2 = 205.8$		
	$R_2 = 49.995$ cm ... $s_2 = 205.1$ mm.					
			3.) R ~ 50 cm.			
18.°30			893.7		306.1	
		308.0	893.9		306.3	894.2
		308.1	893.5		306.2	894.2
		308.1	893.6		306.0	894.0
		308.0	893.8		306.0	893.9
18.°25		308.2	893.8		305.9	894.1
	350.0	308.2	893.7	1150.0	306.1	894.4
		308.0	893.9		306.2	894.3
		308.1	893.6		306.3	894.4
18.°27		308.1	893.7		306.1	894.2
	$2\,s'_3$ 585.6; s'_3 292.8			$2\,s''_3 = 588.1$; $s''_3 = 294.05$		
	$R_3 = 40.00$ cm ... $s_3 = 293.4$.					

Distanz: Spiegel-Skala: 1589 mm.

Zusammenfassung:

t =	R =	$R_{corr.}$ =	s =
	50,00 cm	49,935 cm	148,85 mm
18,°2	44,995 »	44,935 »	205,1 »
	40,00 »	39,945 »	293,4 » .

Bestimmung von ϑ':

Torsionswinkel des Aufhängefadens: $\alpha = 360^0$.

Ausschlag (Mittel aus 5 Ablenkungen): $s_m = 89$ mm.

Hieraus $\vartheta' = 0{,}0044$.

Aus diesen Beobachtungen lassen sich für $\frac{M}{H_1}$ folgende Werte berechnen:

$$\left(\frac{M}{H_1}\right)_{18,°2} = \left\{\begin{matrix}2900\\2906\\2905\end{matrix}\right\}, \text{ im Mittel } = 2904 \text{ C. G. S. Einh.}$$

---

4. Hilfsmessungen.

a) Bestimmung der Poldistanz des Magneten.

Die Poldistanz 2 l des Magneten tritt in dem unter (16) gegebenen allgemeinen Ausdruck für ω innerhalb zweier Faktoren auf. Der erste dieser enthält die Poldistanz des Magneten so, wie sie auf den Ort des Hilfsmagneten, also einen Punkt der magnetischen (x —) Axe des Magneten zu beziehen ist und aus (23) gewonnen werden kann zu:

$$l^2 = 3\left(\frac{A}{M} - \frac{B+C}{2}\frac{1}{M}\right).$$

In den zweiten in (16) enthaltenen Klammerausdruck ist aber derjenige Wert für l^2 einzusetzen, welchen wir in Bezug auf den ringförmigen Leiter für unseren speziellen Fall hergeleitet und sub (26) angegeben haben:

$$l^2 = 3\frac{A}{M} - 4\frac{B}{M} + \frac{C}{M}.$$

Um nun die zwei Werte der Poldistanz aus diesen Gleichungen berechnen zu können, habe ich die Verteilung der Magnetisierungsstärke des Magneten in Richtung seiner Längsaxe auf experimentellem Wege bestimmt und aus jener die Grössen A, B

und C unter der Voraussetzung ermittelt, dass die Intensität der Magnetisierung in sämtlichen Punkten eines auf die magnetische Axe senkrechten Magnetquerschnitts die gleiche ist.

Die Bestimmung der Abhängigkeit der Magnetisierungsintensität s von x geschah mittels eines Spülchens aus wenigen Windungen, das ich aus einer Reihe von Anfangslagen für verschiedene Werte von x mit einer raschen Bewegung vom Magneten herabzog und aus seinem Bereiche entfernte, während dessen die durch Induktion in dem Spülchen erzeugten Strommengen durch ein empfindliches Galvanometer von enormer Schwingungsdauer hindurchflossen und ich den von ihm angezeigten maximalen Ausschlag mass. Letzterer ist mit der Zahl der vom Spülchen in seiner Anfangslage umfassten Kraftlinien, also auch s proportional. So gewann ich s in Funktion von x im relativen Mass der beobachteten Ausschläge, in deren Funktion es aufgetragen, einen Verlauf genau nach einer in Bezug auf die Magnetmitte symmetrischen Parabole ergab; die Gleichung dieser Parabole im relativen Masse der Ausschläge lautet:

$$x^2 = 0{,}0692\ s - 9{,}5$$

entsprechend der Verteilung:

x = 0 cm . . .	s = 137,5	x = ± 1,5 cm . . .	s = 105
± 5	134	± 2	79,5
± 1	123	± 2,5	47.

Bezeichnet man das Produkt aus s und der Querschnittsfläche q des Magneten: $sq \equiv S$, so kann unter der oben erwähnten Voraussetzung geschrieben werden:

$$M = \int_V s\,dv = \frac{1}{q} \int_{-a}^{+a} S\,dx,$$

$$A = \int_V x^2\,s\,dv = \int_{-a}^{+a} x^2\,S\,dx,$$

$$B = \int_V y^2\,s\,dv = \frac{1}{q} \int_{-a}^{+a} S\,dx \int_{-b}^{+b} y^2\,dy \int_{c}^{+c} dz = \frac{b^2}{3} M,$$

$$C = \int_V z^2\,s\,dv = \frac{1}{q} \int_{-a}^{+a} S\,dx \int_{-c}^{+c} z^2\,dz \int_{-b}^{+b} dy = \frac{c^2}{3} M.$$

Auf Grund hiervon ergibt sich für unseren Magneten, für welchen

$$a = 2{,}5 \text{ cm}, \; b = 1{,}2 \text{ cm}, \; c = 0{,}95 \text{ cm}$$

ist,

$$A = 1{,}614 \text{ M}, \; B = 0{,}482 \text{ M}, \; C = 0{,}300 \text{ M}.$$

Somit ist die auf den Ort des Hilfsmagneten bezogene Poldistanz:

$$l^2 = 3 \; (1{,}614 - 0{,}391) = 3{,}67,$$
$$l = \mathbf{1{,}92 \text{ cm}},$$

während der in (16) in den zweiten Klammerausdruck einzusetzende Wert von l sich ergibt:

$$l^2 = 3. \; 1{,}614 - 4. \; 0{,}482 + 0{,}300 = 3{,}214,$$

woraus

$$\mathbf{l = 1{,}80 \text{ cm}.}$$

Würde man das l nach der allgemein üblichen Faustregel, wonach die Poldistanz gleich $^5/_6$ der Stablänge des Magneten ist, berechnen, so erhielte man l = 2,08 cm und für das in (16) vorkommende Korrektionsglied

$$\frac{3}{2} l^2 \frac{r_0^2 - 4 \, d_0^2 - 5 \, b^2}{\varrho_0^4}$$

den Wert 0,069, während dasselbe mit l = 1,80 berechnet zu 0,052 resultiert. Würde also von der Berechnung des speziell für diesen Fall geltenden Wertes der Poldistanz Abstand genommen worden sein, so wäre in der Bestimmung von ω ein Fehler von fast 2 % begangen worden.

b).

Bei den früheren Betrachtungen ist vorausgesetzt worden, dass die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Feldintensität (H_1) an dem Orte, wo der Hilfsmagnet aufgestellt wird, die gleiche sei als diejenige (H) da, wo unser Magnet bei den Schwingungsbeobachtungen aufgehängt war. Da ich nun der örtlichen Verhältnisse wegen die beiden Gruppen von Beobachtungen nicht im gleichen Zimmer vollführen konnte, so musste das Verhältnis $\frac{H_1}{H}$ ermittelt werden. Dies geschah mittels

Schwingungsbeobachtungen an einem Magneten, welcher an den zwei Orten zu unmittelbar aufeinander folgenden Zeiten schwingen gelassen wurde. Sind seine Schwingungsdauern an den zwei Orten resp. τ, τ_1, so ist

$$\frac{H_1}{H} = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^2.$$

Es wurden auch noch mittelst eines F. Kohlrausch'schen Lokalvariometers Kontrolmessungen ausgeführt.

---

c) Bestimmung des Temperaturkoeffizienten des Magneten.

Der eben erwähnte Umstand hatte noch die weitere Unbequemlichkeit zur Folge, dass die Bestimmungen von $\frac{M}{H}$ und MH im allgemeinen bei verschiedenen Temperaturen statt hatten. Auch konnte nicht die Temperatur des Versuchsraumes während der langen Dauer einer Versuchsreihe ganz konstant gehalten werden.

Da nun ω laut (10) mit M^2 proportional ist und einer Temperaturänderung um 3^0 eine Änderung von M um 0,5 % entspricht, so würde eine Nichtbeachtung des Temperaturunterschiedes von 3^0 in der Bestimmung von ω einen Fehler von 1 % zeitigen. So erschien es von Bedeutung, die Variation von M mit der Temperatur zu untersuchen.

Zwecks Bestimmung des Temperaturkoëffizienten α des Magneten, mass ich dessen magnetisches Moment bei Zimmertemperatur und hierauf, indem ich den Magneten in einem eigenst zu diesem Zwecke angefertigten, doppelwandigen Heizgefäss mittels siedenden Wasserdampfes erwärmt habe, bei der Temperatur t des letzteren.

Der Temperaturkoëffizient ergab sich laut

$$M_t = M_o\ (1 - \alpha t)$$

einmal zu 0,00154,
ein anderes mal zu 0,00147,
so dass im Mittel $x = 0{,}00150$ ist.

Nachdem die Schwingungsdauer T des Magneten umgekehrt proportional $\sqrt{M}$ ist, so muss T mit der Temperatur nach dem Gesetze:

$$T = T_0\left(1 + \frac{\alpha}{2} t\right)$$

variieren.

Gewann ich nun in einer Versuchsreihe aus mehreren resp. Beobachtungsreihen heraus

$(A - A_0)$ entsprechend der mittleren Temperatur t,

T » » » » t_1

und $\frac{M}{H_1}$ » » » » t_2,

so reduzierte ich laut obiger Gleichungen die beiden letzteren Grössen auf die Temperatur t.

C. Versuchsergebnisse.

Nachdem ich sub lit. B. num. 3 eine Versuchsreihe wiedergegeben habe, glaube ich mit diesem einen Beispiele den Gang der Versuche zur Genüge demonstriert zu haben und in Anbetracht des etwas umfangreichen Beobachtungsmaterials mich im folgenden auf die Mitteilung der Mittelwerte der aus je einer Versuchsreihe gewonnenen Zahlenwerte von A, A_0, T und $2\frac{M}{H}$ beschränken zu dürfen.

Da äussere magnetische Einflüsse manchmal zu unliebsamen Unregelmässigkeiten im Verlaufe der Magnetschwingungen Anlass boten, wurden von den 12—15 Versuchsreihen, welche pro Ring aufgenommen worden sind, die voraussichtlich zuverlässigsten auserlesen. So sind denn auch hier allein jene Messresultate mitgeteilt, welche aus 8—10 solchen Versuchsreihen gewonnen worden sind.

In der folgenden Zusammenstellung der Messresultate erblickt man pro untersuchtes Metall je eine Tabelle. Die Überschriften der Kolumnen 1—9 sind aus dem früheren ohne jede weitere Interpretation verständlich. Nur das eine sei bemerkt, dass die in den resp. Kolumnen 3 und 4, 6, 8 enthaltenen Grössen sich jeweilig auf die in den resp. Kolumnen 2, 5, 7 enthaltenen Temperaturen beziehen.

Die Werte von T und $2\frac{M}{H}$ wurden auf die den A — s entsprechenden und in Kolumne 2 enthaltenen Temperaturen reduziert. Also sind die in den Kolumnen 11—16 enthaltenen Zahlenwerte auf die in Kolumne 2 und in nochmaliger Reproduktion in Kolumne 10 angegebenen Temperaturen bezogen.

Kolumne 14 enthält die aus den Beobachtungsdaten heraus laut Gleichung (16) ermittelten Werte von ω, während die unmittelbar darauffolgende Kolumne die aus diesen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Werte von ω veranschaulicht.

Kolumne 16 gibt die Abweichungen der ersteren von letzteren in Prozenten von $\omega_{ber.}$ an.

Die Versuche wurden zu einem kleinen Teile im Nordhofe des Eidgen. Physikgebäudes bei den tieferen Temperaturen 2°—8° C. und die weiteren bei Zimmertemperaturen von 13°—31° C. in einem vollkommen eisenfreien Zimmer des genannten Instituts vollführt.

Dem Umstande, dass die Horizontalkomponente H der erdmagnetischen Feldstärke an diesen zwei Orten beträchtlich verschieden war, ist es zuzuschreiben, dass die T und $2\frac{M}{H} - s$ jeweilig in den zwei ersten Versuchsreihen von den in den übrigen Versuchen gewonnenen Werten stark abweichen.

* * *

In Anbetracht dessen, dass an jeder Bestimmung von ω mehr als ein Dutzend stets von Neuem zu bestimmende Grössen Anteil haben, ist die mit der benutzten elektromagnetischen Dämpfungsmethode von mir erzielte Genauigkeit als eine zufriedenstellende zu bezeichnen, zumal ich die Versuche nur mit grossen Unterbrechungen zu vollführen Gelegenheit hatte und demzufolge die äusseren Verhältnisse, unter welchen die verschiedenen Beobachtungsreihen für ein und dasselbe Metall entstanden, nach vielen Richtungen hin verschieden waren.

I. Zinn. Dimensionen des Ringes: $r_a = 9{,}827$ cm; $r_i = 8{,}153$ cm; $r_o = 8{,}990$ cm;
$2\,h = r_a - r_i = 1{,}674$ cm; $2\,b = 1{,}691$ cm.

1 Nr. d. Versuchsreihe	2 t	3 0,4343 . l	4 0,4343 . l_0	5 t	6 T	7 ϑ	8 t	9 $2\frac{M}{H}$	10 t	11 0,4343($l - l_0$)	12 $T_{red.}$	13 $2\left(\frac{M}{H}\right)_{red.}$	14 $\omega \cdot 10^{-4}$ beob.	15 $\omega \cdot 10^{-4}$ ber.	16 Fehler %
1	$1.^0 9$	0.003109	0.000277	$1^0 9$	5.″9715	0.0248	$2.^0 0$	7717	$1.^0 9$	0.002832	5.″9715	7718	**1.140**	1.124	+ 1.55
2	$7.^0 8$	0.003131	0.000310	$8.^0 0$	5.″9766	0.0254	$8.^0 0$	7692	$7.^0 8$	0.002821	5.″9757	7694	**1.140**	1.151_5	− 1.05
3	$25.^0 8$	0.002590	0.000304	$25.^0 75$	5.″5838	0.0216	$21.^0 8$	6320	$25.^0 8$	0.002286	5.″5834	6282	$\mathbf{1.233_5}$	1.235_5	− 0.15
4	$28.^0 85$	0.002564	0.000327	$28.^0 5$	5.″5954	0.0216	$19.^0 2$	6343	$28.^0 85$	0.002237	5.″5968	6251	**1.252**	1.249_5	+ 0.20
5	$25.^0 45$	0.002575	0.000287	$25.^0 9$	5.″5828	0.0216	$19.^0 2$	6343	$25.^0 45$	0.002288	5.″5809	6284	$\mathbf{1.233_5}$	1.234	− 0.0
6	$31.^0 35$	0.002521	0.000312	$30.^0 95$	5.″5970	0.0215	$18.^0 8$	6355	$31.^0 35$	0.002209	5.″5988	6235	**1.264**	1.261_5	+ 0.2
7	$22.^0 15$	0.002609	0.000283	$24.^0 15$	5.″5687	0.0215	$19.^0 0$	6354	$22.^0 15$	0.002326	5.″5604	6324	$\mathbf{1.225_5}$	1.218_5	+ 0.6
8	$13.^0 7$	0.002430	0.000278	$13.^0 7$	5.″7898	0.0238	$18.^0 2$	5760	$13.^0 7$	0.002152	5.″7904	5798	**1.166**	1.179_5	− 1.15
9	$18.^0 2$	0.002383	0.000287	$18.^0 1$	5.″7968	0.0236	$18.^0 4$	5835	$18.^0 2$	0.002096	5.″7971	5837	**1.202**	1.200	+ 0.15
10	$15.^0 75$	0.002399	0.000308	$15.^0 5$	5.″8171	0.0238	$16.^0 9$	5759	$15.^0 75$	0.002091	5.″8182	5769	**1.191**	1.188_5	+ 0.2
															f_m : + 0.05

$$\omega \cdot 10^{-4} = \mathbf{1{,}115_5} + \mathbf{0{,}00465\ t} = \mathbf{1{,}115_5\ [1 + 0{,}00418\ t]}.$$

1 Nr. d. Versuchsreihe	2 t	3 $0{,}4343 \cdot J$	4 $0{,}4343 \cdot J_0$	5 t	6 T	7 ϑ	8 t	9 $2\frac{M}{H}$	10 t	11 $0{,}4343(J-J_0)$	12 $T_{red.}$	13 $2\left(\frac{M}{H}\right)_{red.}$	14 $\omega \cdot 10^{-4}$ beob.	15 $\omega \cdot 10^{-4}$ ber.	16 Fehler %
II. Bronze $Sn_{90}Cu_{10}$. Dimensionen des Ringes: $r_a = 9{,}896$ cm; $r_i = 8{,}159$ cm; $r_o = 9{,}027$ cm; $2h = r_a - r_i = 1{,}737$ cm; $2b = 1{,}825$ cm.															
1	2.°3	0.003445	0.000324	2.°1	5.″9568	0.0248	2.°0	7722	2.°3	0.003121	5.″9577	7720	**1.134**	1.133	+ 0.08
2	8.°0	0.003323	0.000288	8.°0	5.″9811	0.0255	8.°0	7678	8.°0	0.003035	5.″9811	7678	**1.154**	1.1585	− 0.4
3	26.°55	0.002813	0.000330	26.°5	5.″5822	0.0218	19.°9	6338	26.°55	0.002483	5.″5824	6277	**1.239$_5$**	1.243	− 0.25
4	31.°15	0.002729	0.000309	31.°1	5.″5973	0.0220	18.°8	6355	31.°15	0.002420	5.″5975	6233	**1.260**	1.2635	− 0.3
5	22.°7	0.002799	0.000283	24.°1	5.″5687	0.0217	19.°0	6354	22.°7	0.002516	5.″5625	5320	**1.237**	1.2255	+ 0.95
6	28.°4	0.002455	0.000316	24.°8	5.″8143	0.0237	20.°4	5763	28.°4	0.002139	5.″8125	5694	**1.252**	1.251	+ 0.05
7	13.°65	0.002618	0.000290	13.°85	5.″7853	0.0232	17.°4	5804	13.°65	0.002328	5.″7844	5836	**1.185$_5$**	1.1845	+ 0.1
8	22.°1	0.002551	0.000320	21.°65	5.″8017	0.0234	19.°2	5796	22.°1	0.002231	5.″7997	5770	**1.219$_5$**	1.2225	− 0.25
$\omega \cdot 10^{-4} = 1{,}122_5 + 0{,}00452_5\, t = 1{,}122_5\,[1 + 0{,}00403\, t]$.															$f_m = -0.03$
III. Bronze $Sn_{75}Cu_{25}$. Dimensionen des Ringes: $r_a = 9{,}831$ cm; $r_i = 8{,}125$ cm; $r_o = 8{,}978$ cm; $2h = r_a - r_i = 1{,}706$ cm; $2b = 1{,}680$ cm.															
1	3.°3	0.003216	0.000312	3.°5	5.″9713	0.0249	3.°85	7718	3.°3	0.002904	5.″9704	7724	**1.126**	1.1315	− 0.5
2	6.°8	0.003189	0.000318	6.°4	5.″9762	0.0250	6.°0	7698	6.°8	0.002871	5.″9780	7689	**1.132**	1.1405	− 0.65
3	25.°05	0.002699	0.000294	25.°6	5.″5827	0 0216	19.°9	6338	25.°05	0.002405	5.″5804	6312	**1.192$_5$**	1.1875	+ 0.45
4	30.°4	0.002671	0.000310	30.°0	5.″5894	0.0218	18.°8	6355	30.°4	0.002361	5.″5919	6258	**1 201$_5$**	1.2015	+ 0.0
5	23.°2	0.002715	0.000283	24.°15	5.″5687	0.0217	19.°0	6354	23.°2	0.002432	5.″5646	6319	**1.184**	1.1825	+ 0.1
6	28.°95	0.002395	0.000306	27.°5	5.″8138	0.0240	20.°4	5763	28.°95	0.002089	5.″8202	5691	**1.183$_5$**	1.1975	− 1.2
7	17.°85	0.002467	0.000291	17.°8	5.″7965	0.0235	18.°3	5836	17.°85	0.002176	5.″7969	5839	**1.171$_5$**	1.169	+ 0.25
8	12.°55	0.002453	0.000277	12.°6	5.″8110	0.0236	17.°2	5756	12.°55	0.002176	5.″8108	5795	**1.160**	1.155	+ 0.55
9	14.°9	0.002446	0.000308	14.°1	5.″8155	0.0237	16.°9	5759	14.°9	0.002138	5.″8194	5776	**1.175**	1.1615	+ 1.15
$\omega \cdot 10^{-4} = 1{,}123_1 + 0{,}00257\, t = 1{,}123_1\,[1 + 0{,}00229\, t]$.															$f_m = +0.2$

1 Nr. d. Versuchsreihe	2 t	3 0,4343 λ	4 0,4343 λ_0	5 t	6 T	7 ϑ	8 t	9 $2\frac{M}{H}$	10 t	11 $0{,}4343(\lambda-\lambda_0)$	12 $T_{red.}$	13 $2\left(\frac{M}{H}\right)_{red.}$	14 $\omega \cdot 10^{-4}$ beob.	15 $\omega \cdot 10^{-4}$ ber.	16 Fehler %
IV. Bronze $Sn_{25}Cu_{75}$. Dimensionen des Ringes: $r_a = 9{,}547$ cm; $r_i = 8{,}171$ cm; $2h = r_a - r_i = 1{,}376$ cm; $r_o = 8{,}859$ cm; $2b = 1{,}773$ cm.															
1	7.°6	0.001234	0.000310	8.°8	5.″9802	0.0250	9.°0	7664	7.°6	0.000924	5.″9750	7681	**3.106**	3.100	+ 0.2
2	6.°15	0.001229	0.000298	6.°1	5.″9735	0.0250	5.°7	7705	6.°15	0.000931	5.″9738	7700	**3.091**	3.097	− 0.2
3	29.°25	0.001073	0.000283	25.°35	5.″5702	0.0219	18.°0	6350	29.°25	0.000790	5.″5865	6243	**3.168**	3.142	+ 0.85
4	27.°55	0.001095	0.000293	26.°3	5.″5740	0.0218	19.°2	6349	27.°55	0.000802	5.″5791	6270	**3.138**	3.138	0
5	28.°55	0.001020	0.000309	28.°2	5.″8084	0.0237	20.°0	5814	28.°55	0.000711	5.″8100	5739	**3.105**	3.140	− 1.15
6	23.°15	0.001026	0.000319	23.°25	5.″8058	0.0234	19 °3	5805	23.°15	0.000707	5.″8055	5772	**3.144**	3.130	+ 0.45
7	19.°1	0.001024	0.000307	17.°65	5.″7953	0.0235	19.°1	5804	19 °1	0.000717	5.″8015	5804	**3.119**	3.122	− 0.1
8	13.°55	0.001011	0.000296	13.°1	5.″8137	0.0236	16.°9	5759	13.°55	0.000715	5.″8156	5788	**3.112**	3.111	0
$\omega \cdot 10^{-4} = \mathbf{3{,}085_2 + 0{,}00193\ t = 3{,}085_2\ [1+0{,}00062_5\ t].}$														f_m =	0.0
V. Bronze $Sn_{10}Cu_{90}$. Dimensionen des Ringes: $r_a = 9{,}845$ cm; $r_i = 8{,}265$ cm; $r_o = 9{,}055$ cm; $2h = r_a - r_i = 1{,}580$ cm; $2b = 1{,}594$ cm.															
1	9.°0	0.002044	0.000310	8.°8	5.″9802	0.0251	9.°0	7664	9.°0	0.001734	5.″9811	7664	**1.611**	1.609	+ 0.1
2	13.°0	0.002020	0.000321	6.°75	5.″9752	0.0253	7.°0	7686	13.°0	0.001699	6.″0031	7617	**1.628**	1.624	+ 0.25
3	29.°8	0.001784	0.000328	25.°35	5.″5702	0.0219	18.°0	6349	29.°8	0.001456	5.″8887	6237	**1.676$_5$**	1.680$_5$	− 0.25
4	27.°7	0.001772	0.000317	26.°3	5.″5740	0.0219	19.°2	6349	27.°7	0.001455	5.″5798	6268	**1.688**	1.677	+ 0.8
5	23.°15	0.001790	0.000291	24.°15	5.″5687	0.0217	19.°0	6354	23.°15	0.001499	5.″5645	6314	**1.656**	1.658	− 0.1
6	30.°0	0.001587	0.000302	26.°7	5.″8115	0.0236	21.°95	5815	30.°0	0.001285	5.″8260	5744	**1.676**	1.683	− 0.45
7	23.°65	0.001623	0.000319	23.°25	5.″8058	0.0235	19.°3	5805	23.°65	0.001304	5.″8075	5768	**1.663**	1.660	+ 0.2
8	17.°8	0.001620	0.000287	16.°8	5.″7929	0.0237	17.°9	5815	17.°8	0.001333	5.″7973	5816	**1.643**	1.640	+ 0.2
9	14.°8	0.001651	0.000290	14.°45	5.″7850	0.0236	17.°4	5804	14.°8	0.001361	5.″7859	5827	**1.616**	1.630	− 0.85
$\omega \cdot 10^{-4} = \mathbf{1{,}577 + 0{,}00354\ t = 1{,}577\ [1 + 0{,}00224\ t].}$														$f_m = -$	0.1

In der nun folgenden Zusammenstellung der Messresultate erblicken wir in der zweiten Kolumne die spezifischen Widerstände, in Kolumne 3 die elektrischen Leitungsfähigkeiten der untersuchten Metalle bei 0° C.; Kolumne 4 enthält die Werte des durch die Beziehung:

$$\alpha = \frac{\omega_t - \omega_0}{\omega_0} \frac{1}{t}$$

definierten Temperaturkoeffizienten.

1	2 ω_0	3 $\varkappa_0$	4 α
	C. G. S.-Einheiten.		
Zinn, rein	$1{,}115_5 . 10^4$	$8{,}965 . 10^{-5}$	0,00418
Sn Cu m. 8,15 Vol. % Cu	$1{,}122_5$. »	8,908. »	0,00403
Sn Cu » 21,4 »	$1{,}123_1$. »	8,904. »	0,00229
Sn Cu » 71,7 »	3,085 . »	3,241. »	0,00062
Sn Cu » 88,15 »	1,577 . »	6,341. »	0,00224

Aus dem Vergleiche dieser Resultate mit den auf Seite 8 mitgeteilten Ergebnissen der Matthiessen'schen Versuche ersieht man, dass die für die zwei letzten Metalle erhaltenen Leitungsfähigkeiten in die Reihe der von Matthiessen gefundenen Leitvermögen sehr gut hineinpassen, dass jedoch die für die anderen zwei Bronzen gefundenen Werte von $\varkappa_0$ bedeutend grösser sind, als die entsprechenden Matthiessen'schen Werte; fernerhin ist der Temperaturkoeffizient für die Bronze $Sn_{90}Cu_{10}$ ungefähr 0,004, während der entsprechende nach Matthiessen nur circa halb so gross ist. Diese Abweichungen dürften dem Umstande zuzuschreiben sein, dass das Zinn, welches Matthiessen als Rohmaterial zur Verfügung stand, mit mancher Unreinigkeit behaftet war, wofür die Tatsache spricht, dass er als elektrisches Leitvermögen des reinen Zinns den kleinen Wert von $7{,}5 . 10^{-5}$ C.G.S.-Einheiten findet. Dagegen steht der von mir gefundene Wert von $\varkappa_0$ für Zinn: $8{,}965 . 10^{-5}$ in gutem Einklang mit der von Jäger und Diesselhorst gemachten neuesten Bestimmung von $\varkappa$ für Zinn, welcher wegen der möglichst vollkommenen Reinheit des von ihnen angewandten Zinns das grösste Zutrauen entgegenzubringen ist. Sie fanden $\varkappa_{18}$ für Zinn gleich $8{,}28 . 10^{-5}$, woraus $\varkappa_0$ sich mit dem von ihnen gefundenen Temperatur-

koeffizienten 0,00465 zu $8{,}97 \cdot 10^{-5}$ C. G. S.-Einheiten berechnen lässt. Der von mir gefundene Temperaturkoeffizient $\alpha = 0{,}00428$ für Zinn weicht von dem genannten Wert nach J. & D. beträchtlich ab.

Aus den Versuchsergebnissen ist zu ersehen, dass die elektrische Leitungsfähigkeit des reinen Zinns durch Zusatz von Kupfer nur wenig geändert wird, so wenig, dass die Bronze mit 21 Vol. % Cu eine nur um $^3/_4$ % kleinere Leitungsfähigkeit hat, als reines Zinn. Hiergegen bedingt ein kleiner Zusatz von Zinn eine rapide Abnahme der Leitfähigkeit des Kupfers.

Aus meinen Resultaten heraus lässt sich betreffs Existenz von Kupfer-Zinn-Metallverbindungen im Sinne der Ostwald-Liebenow'schen Anschauungsweise kein Schluss ziehen.

III.

Messung der spezifischen Wärme.

1. Messapparate und Messverfahren.

Da zur Auswertung der Wärmeleitungsfähigkeiten der untersuchten Metalle die Kenntnis ihrer spezifischen Wärmen für die Temperatur 13,°5 C. nötig war, so wurden die mittleren spezifischen Wärmen für das Temperaturintervall 0°—27° C. ermittelt. Indem zu diesem Behufe von der Mischungsmethode Gebrauch gemacht worden ist, wurden die Probemassen auf die Temperatur des schmelzenden Eises abgekühlt, sodann mit Wasser von circa 29° gemischt, so dass eine Ausgleichstemperatur von circa 27° eintrat. Die Umgebungstemperatur war bei diesen Versuchen stets um 23° herum gelegen, so dass ausschliesslich nur Abnahmen der Calorimetertemperatur beobachtet wurden und Fehler, welche aus dem beim Passieren von Temperaturextremis eintretenden »toten Gange« des Thermometers hervorgehen, vermieden werden konnten.

Als Calorimeter diente ein cylindrisches Gefäss von 8,0 cm Durchmesser und 8,0 cm Höhe aus dünnstem Kupferblech, das

in ein Zinkblechgefäss so eingesetzt war, dass es an drei, an seinem obern Rande angelöteten Nasen auf dem mit Wolle und einem Holzringe bekleideten Rand des Zinkgefässes aufruhte. Letzteres wurde zwecks Erzielung konstanter Umgebungstemperatur in ein mit lauwarmem Wasser gefülltes doppelwandiges Gefäss gesetzt.

Als Temperaturmesser benützte ich ein in fünfzigstel Grade geteiltes Baudin'sches Thermometer mit einer Erweiterung der Kapillaren zwischen 0,°5 und 18 °. Da einem Grad eine Skalenlänge von 3,3 cm entsprach, so konnte noch $^1/_{500}$ Grad geschätzt werden. Das Thermometer wurde mit einem Normalthermometer verglichen, dessen Angaben auf diejenigen des Luftthermometers bezogen waren.

Die Korrekturen des Baudin'schen Thermometers waren:

bei 26,°6	Korr. = — 0,°381	bei 28,°05	Korr. = — 0,°396
27,°0	— 0,°386	28,°6	— 0,°400
27,°5	— 0,°390	29,°2	— 0,°405

Da die Erweiterung der Kapillaren stets in die Wassermenge des Kalorimeters eingetaucht war, so umfasste der herausragende Faden die Strecke von nur 9 Graden und bedang demzufolge nur geringfügige Korrektionen. Diese waren:

bei 26,°0 Korr. = + 0,0041 . Δt^0
27,°5 + 0,00435 . Δt^0
29,°0 + 0,0046 . Δt^0,

wenn Δt die Differenz zwischen der vom Thermometer angezeigten und der äusseren Temperatur bedeutet. Als Probemassen wurden zu diesen Untersuchungen die Drehspäne benutzt, welche beim letzten Abdrehen der Ringe gewonnen worden sind. Ich nahm von diesen jeweilen eine Portion von 100—120 g, schüttete diese nach erfolgter Wägung in ein enges, cylindrisches Gefäss aus dünnstem Kupferblech, und setzte letzteres in schmelzendes Eis ein. Sodann nahm ich die Wägung der Kalorimetermassen vor, brachte sie auf die Temperatur von circa 31 Grad, und nachdem die Temperatur der Späne bereits 10' hindurch stationär geblieben war, fing ich meine Beobachtungen an. Vor allem las ich fünf Minuten hindurch alle 30 Sekunden die Temperatur der Kalorimetermassen ab; nun warf ich zur Zeit 5'10" die Späne in das Kalorimeter, alsdann

beobachtete ich die Temperatur des Kalorimeters zur Zeit 5'30", 5'45", etc., also bis zur Zeit 7'0" alle 15" und weitere 3 Minuten hindurch alle 30". Den Abschluss eines solchen Versuches bildete die summarische Wägung der Kalorimetermassen und Späne. Die Umgebungstemperatur notierte ich während des Versuches mehreremal.

Es wurde in allen Fällen sowohl vor dem Einwerfen der Masse, wie denn auch nach erfolgtem Temperaturausgleich ein vollkommen linearer Verlauf der Temperatur konstatiert.

* * *

Zur Berechnung der spezifischen Wärme wurde jeweilen diejenige Reihe von Beobachtungen herausgegriffen, welche sich vom Augenblicke z_o an, in welchem die Späne in das Kalorimeter geworfen worden sind, bis zu einem Zeitpunkte z_n erstrecken, der dem Momente des Temperaturausgleichs um ca. 2 Minuten nachfolgt. Bedeutet M die Masse der angewandten Späne, C die Wärmekapazität ihrer Masseneinheit, Σ [mc] den Wasserwert der Kalorimetermassen, t_o die Anfangstemperatur der Späne, ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ..., ϑ_n die zu den um je 15" voneinander verschiedenen Zeiten z_0, z_1, z_2, ..., z_n statthabenden Kalorimetertemperaturen, so gilt:

$$M \int_{t_o}^{\vartheta_n} C dt = MC_m (\vartheta_n - t_o) = \Sigma [mc] (\vartheta_o - \vartheta_n) - \Sigma [h O (\vartheta - t_a) \Delta z].$$

Hierin ist h die äussere Wärmeableitungskonstante der Kalorimeteroberfläche O und t_a die Umgebungstemperatur. Da nun h wegen des kleinen Temperaturunterschiedes $(\vartheta - t_a)$ eine Konstante ist, so gilt weiterhin:

$$1) \quad M \cdot C_m (\vartheta_n - t_o) = \Sigma [mc] (\vartheta_o - \vartheta_n) - h O \frac{1}{6} \left[\frac{\vartheta_o + \vartheta_n}{2} + \right.$$
$$\left. + \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{n-1} - n\, t_a \right].$$

Hieraus lässt sich C_m, die mittlere spezifische Wärme für $0^0 \sim \vartheta_n{}^0$ berechnen, falls hO bekannt ist.

* * *

Das Produkt hO lässt sich einmal aus den vor dem Einwerfen der Späne, ein anderes Mal aus den nach erfolgtem Temperaturausgleich gemachten Beobachtungen heraus ermitteln. Bedeuten $\Delta\vartheta$ und $\Delta\vartheta'$ den minutlichen Temperaturabfall vor

resp. nach dem Temperaturausgleich und resp. ϑ_m, ϑ_m' die in der Vor- resp. Nachperiode des Versuches statthabende mittlere Kalorimetertemperatur, so gelten die Beziehungen:

2) $\quad hO\,(\vartheta_m - t_a) = \Sigma[mc]\,\Delta\vartheta$

und 3) $\quad hO\,(\vartheta_m' - t_a) = (\Sigma[mc] + MC)\,\Delta\vartheta'$.

Also wurde hO stets zweimal ermittelt und von beiden Werten das Mittel genommen.

2. Wiedergabe eines Versuches.

Material: Bronze $Sn_{10}Cu_{90}$.

Beobachtungen.

Zeit	ϑ	Zeit	ϑ	Zeit	ϑ
0′ 0″	29,°160	z_0 = 5′ 10″	ϑ_0	8′ 30″	27,°219
30″	°097	30″	27,°533	9′ 0″	°177
1′ 0″	°050	45″	°480	30″	°130
30″	28,°988	6′ 0″	°446	10′ 0″	°088
2′ 0″	°928	15″	°428	30″	°042
30″	°865	30″	°405	11′ 0″	°000
3′ 0″	°809	45″	°380		
30″	°755	7′ 0″	°360		
4′ 0″	°697	30″	°312		
30″	°637	z_n = 8′ 0″	ϑ_n = 27,°268		
5′ 0″	ϑ_e 28,°577				

Die Masse des Kalorimeters samt derjenigen des Rührers war

$$m_{cu} = 47{,}09\ g.$$

Die Wassermasse ist aus den Wägungen vor und nach dem Versuch gefunden worden zu: $m_W = \left\{\begin{matrix}236{,}2\ g\\235{,}5\ »\end{matrix}\right\} = 235{,}8\ g.$

Die Wasserwerte der Kalorimetermassen betrugen:

$$[mc]_{Cu} = 4{,}4 \text{ g-cal},$$
$$[mc^1)]_W = 233{,}8 \text{ » »},$$
$$[mc] = 1{,}2 \text{ » »},$$
Thermom.
$$\Sigma[mc] = 239{,}4 \text{ g-cal},$$

fernerhin war die Masse der Späne: $M_{Br} = 103{,}98\ g$,

ihre Anfangstemperatur: $t_o = 0{,}°05$;

die Umgebungstemperatur im Mittel: $t_a = 20{,}°7$.

[1]) Die spezifische Wärme des Wassers für 25°—30° C. wurde nach E. Lüdin gleich 0,9915 gesetzt.

Berechnung der Wärmekapazität.

Der minutliche Temperaturabfall $\Delta\vartheta$ in der Vorperiode des Versuches ist $\Delta\vartheta = \frac{29,^0160 - 28,^0577}{5} = 0,^0 1166,$

entsprechend der mittleren Temperatur

$$\vartheta_m = 28,^0 87, \qquad \vartheta_{m\,corr.} = 28,^0 49.$$

Gleichung 2) liefert das Resultat: $hO = \frac{239,4 \,.\, 0,^0 1166}{28,^0 5 - 20,^0 7} = 3,58$ g-cal.

Der minutliche Temperaturabfall $\vartheta\Delta'$ in der Nachperiode des Versuches ist $\Delta\vartheta' = \frac{27,^0360 - 27,^0000}{4} = 0,^0 0900,$

entsprechend der mittleren Temperatur

$$\vartheta'_m = 27,^0 18, \qquad \vartheta'_{m\,corr.} = 26,^0 81.$$

Diese Werte in 3) eingesetzt, und auf Grund einer approximativen Berechnung von C für MC = 9,1 g-cal.-en angenommen, erhält man: $hO = \frac{248,5 \,.\, 0,^0 0900}{26,^0 8 - 20,^0 7} = 3,67$ g-cal.

Der Mittelwert von hO ist demnach $hO = 3,62$ » » .

Die innerhalb des Zeitintervalles $z_o - z_n$ statthabende mittlere Temperatur ergiebt sich aus der Temperaturkurve

$$\vartheta_{Mittel} = 27,^0 07.$$

Also ist $\sum_{z_n}^{z_o} hO\,(\vartheta - t_a)\,\Delta z = 65,2$ g-cal.

Nun ist $\vartheta_o = \vartheta_e - \frac{\Delta\vartheta}{6} = 28,^0577 - 0,^0019 = 28,^0558,$

korrigiert = $28,^0158$, und noch wegen des herausragenden Fadens korrigiert: $\vartheta_{o\,corr.} = 28,^0193.$

Weiterhin ist

$\vartheta_{n\,corr.} = 27,^0268 - 0,^0388 + 0,^0028$, also $\vartheta_{n\,corr.} = 26,^0908.$

Somit ist laut (1):

$$26,858 \,.\, 104,0\; C_m = 339,4 \,.\, 1,285 - 65,2 = 242,4,$$

woraus $\mathbf{C_m = 0,0868}$ **g-cal.**

3. *Versuchsergebnisse.*

M g	Σ(mc) g-cal	$\Delta\vartheta$	$\Delta\vartheta'$	t_a	t_o	$\vartheta_{o\,corr}$	$\vartheta_{n\,corr}$	Σ(mc) . (ϑ_o ϑ_n) g-cal	h O . $\Sigma[(\vartheta - t_a)\Delta z]$ g-cal	C_m g-cal
					I. Zinn.					
118,9	233,9	0,°1158	0,°0812	23,°0	0,°01	28,°423	27,°429	232,0	59,9	**0,0529**
118,0	238,4	0,°1128	0,°0802	24,°9	0,°00	28,°454	27,°496	228,2	58,5	**0,0524**
121,3	233,9	0,°1266	0,°1025	23,°35	0,°09	28,°360	27,°309	246,0	70,6	**0,0532**
119,7	247,7	0,°1440	0,°0910	24,°3	0,°08	28,°461	27,°490	240,0	66,6	**0,0529**
119,1	229,4	0,°1318	0,°0945	23,°3	0,°09	28,°339	27,°297	239,0	66,7	**0,0532**
					II. $Sn_{90}\,Cu_{10}$.					
122,8	239,7	0,°1086	0,°0908	24,°8	−0,°05	28,°334	27,°284	251,3	64,7	**0,0556**
121,3	234,2	0,°0846	0,°0768	25,°3	0,°00	28,°523	27,°514	236,2	51,1	**0,0555**
120,0	237,1	0,°1082	0,°0938	23,°8	0,°05	28,°439	27,°408	244,8	63,9	**0,0552**
118,5	237,7	0,°0955	0,°0817	25,°25	0,°05	28,°526	27,°518	239,2	57,2	**0,0559**
117,6	241,5	0,°1122	0,°0990	23,°9	0,°13	28,°459	27,°442	245,6	71,5	**0,0551**
					III. $Sn_{75}\,Cu_{25}$.					
115,8	240,3	0,°1315	0,°1098	21,°7	−0,°07	28,°446	27,°236	267,2	76,2	**0,0605**
110,5	216,4	0,°1205	0,°0835	23,°2	−0,°02	28,°328	27,°237	236,0	55,3	**0,0601**
108,6	225,3	0,°1190	0,°0870	23,°5	0,°02	28,°108	27,°055	237,2	57,7	**0,0605**
120,1	212,1	0,°1480	0,°1168	23,°1	−0,°10	28,°579	27,°310	269,0	73,9	**0,0605**
119,7	234,5	0,°1380	0,°1020	22,°7	0,°00	28,°364	27,°232	265,6	66,7	**0,0610**
					IV. $Sn_{25}\,Cu_{75}$.					
108,1	231,0	0,°1325	0,°1112	24,°2	−0,°06	28,°421	27,°065	313,3	72,9	**0,0822**
110,7	224,1	0,°1220	0,°1178	23,°35	−0,°01	28,°203	26,°801	314,0	72,4	**0,0815**
109,7	219,2	0,°1290	0,°1082	24,°9	0,°03	28,°269	26,°879	304,8	65,5	**0,0812**
125,8	227,2	0,°1131	0,°0798	24,°2	0,°00	28,°273	26,°826	328,5	54,0	**0,0813**
123,4	225,8	0,°1404	0,°1010	22,°55	0,°00	28,°260	26,°750	341,2	70,2	**0,0819**
					V. $Sn_{10}\,Cu_{90}$.					
104,0	239,4	0,°1166	0,°0900	20,°7	0,°05	28,°193	26,°908	307,6	65,2	**0,0868**
104,7	225,2	0,°1372	0,°1108	20,°5	0,°05	28,°233	26,°830	315,8	73,9	**0,0860**
110,5	230,8	0,°1148	0,°1002	22,°4	−0,°06	28,°209	26,°804	324,0	68,5	**0,0862**
117,0	234,2	0,°1472	0,°1028	23,°1	−0,°04	28,°072	26,°609	342,2	73,6	**0,0862**
124,5	230,5	0,°1260	0,°0976	22,°5	−0,°03	28,°330	26,°804	352,0	65,7	**0,0858**

In folgender Tabelle sind in Kolumne 3 die Dichten ϱ in g/cm³, in Kolumne 4 die Wärmekapazitäten pro Masseneinheit für die mittlere Temperatur von 13,°5 C. in g-cal und in erg aufgezählt. Die mit der Überschrift c versehene Zahlenreihe stellt die aus jenen berechneten spezifischen Wärmen der Volumeneinheit in g-cal/cm³ und in erg/cm³ dar. Um nun die Wärmekapazitäten C und c der Legierungen mit den Summen der ihren Bestandteilen getrennt zukommenden Wärmekapazitäten C resp. c vergleichen zu können, sind auch noch die aus den relativen Volumina der Bestandteile berechneten Werte C_{ber} und c_{ber} sowohl in den Einheiten g-cal, wie erg beigefügt.

Material	Cu-Gehalt Gew. %	Vol. %	ϱ g/cm³	$C_{13,05}$ g-cal/g	erg/g	$c_{13,05} = C\varrho$ g-cal/cm³	erg/cm³	C_{ber} g-cal/g	erg/g	c_{ber} g-cal/cm³	erg/cm³
Sn	0	0	7,31	0,0529	$0,222.10^7$	0,3865	$1,625.10^7$	—	—	—	—
$Sn_{90}Cu_{10}$	9,75	8,15	7,515	0,0555	$0,233.10^7$	0,417	$1,75\ .10^7$	0,0566	$0,238.10^7$	0,430	$1,81\ .10^7$
$Sn_{75}Cu_{25}$	24,95	21,4	7,865	0,0605	$0,254.10^7$	0,476	$2,00\ .10^7$	0,0625	$0,262.10^7$	0,487	$2,045.10^7$
$Sn_{25}Cu_{75}$	75,55	71,7	8,89	0,0816	$0,345.10^7$	0,725	$3,045.10^7$	0,0820	$0,344.10^7$	0,697	$2,93\ .10^7$
$Sn_{10}Cu_{90}$	90,1	88,15	8,475	0,0862	$0,362.10^7$	0,731	$3,07\ .10^7$	0,0877	$0,368.10^7$	0,766	$3,22\ .10^7$
[Cu]			[8,92]	[0,0915]	[$0,385.10^7$]	[0,817]	[$3,43.10^7$]	—	—	—	—

Wie diese Zahlen erkennen lassen, sind die Wärmekapazitäten der Masseneinheit der vier Bronzen durchwegs kleiner als die berechneten spezifischen Wärmen. Dasselbe gilt mit Ausnahme der Bronze $Sn_{25}Cu_{75}$ auch für die Wärmekapazitäten pro Volumeneinheit.

IV.

Messung der Wärmeleitungsfähigkeit.

A. Theorie der Messmethode.

Zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit der fünf untersuchten Metalle wurde die von Herrn Prof. Dr. H. F. Weber im 25. Bande der Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich (p. 161—187) beschriebene Messmethode gebraucht. Diese beruht auf Beobachtung der Vorgänge, welche sich bei der Abkühlung eines in einem Raum konstanter Temperatur aufgestellten Ringes abspielen, sobald ihm zuvor in einem beliebigen Querschnitte so lange Wärme zugeführt worden war, bis die Temperaturverteilung längs des ganzen Ringumfanges stationär geworden ist. In der analytischen Behandlung dieses Wärmeleitungsproblems führt Herr Prof. Weber c, die spezifische Wärme der Volumeneinheit und k, den inneren Wärmeleitungskoeffizienten der Ringsubstanz, welche von Fourier in ganz unzutreffender Weise als Konstanten vorausgesetzt worden sind, als lineare Funktionen der Temperatur u ein, so dass

$$c = c_0 + c_1 u,$$
$$k = k_0 - k_1 u,$$

wo c_0 und k_0 die der Temperatur 0 °C. entsprechenden Werte von c und k sind; weiterhin macht Herr Prof. Weber den Ansatz, wonach diejenige Wärmemenge, welche von der Oberfläche dS eines Ringelementes, das zur Zeit t die Temperutur u hat, an die Umgebung von der niedrigeren Temperatur u_a durch Strahlung, Leitung und Konvektion während des Zeitelementes dt abgegeben wird, den Ausdruck habe:

$$dW = \left[h_0 + h_1 (u - u_a)\right] (u - u_a)\, dS\, dt.$$

Während man einerseits diese Ansätze zu dem Zwecke einführt, um die Vorgänge der Wärmebewegung auf analytischem Wege naturgetreu wiedergeben zu können, muss man andererseits von einer ganz allgemeinen analytischen Behandlung der

Wärmebewegung im Ringe der nicht unbedeutenden Schwierigkeiten wegen, welche jene involviert, absehen und sich mit einer angenäherten Lösung dieses Problems zufrieden geben.

So machen wir denn mit H. F. Weber die Voraussetzung, dass die Dicke des Ringes seinem Durchmesser gegenüber so klein sei, dass man sich den Ring durch einen Stab ersetzt denken könne, der aus jenem etwa derart entstehen möge, dass man den Ring in dem Querschnitte, in welchem er geheizt wird, aufschneidet und zu einem Stabe aufrollt; des weiteren treffen wir noch die Annahme, dass die zur Ringmittellinie senkrechten Querschnitte zu allen Zeiten als isotherme Flächen angesehen werden können. Auf diese Weise wird das Problem auf dasjenige der Wärmebewegung in einem Stabe zurückgeführt, welcher in eine Umgebung von der konstanten Temperatur u_a versetzt, in seinen beiden Endquerschnitten Wärme bei der konstanten Temperatur U so lange zugeführt bekommt, bis die Temperaturverteilung längs des ganzen Stabes eine stationäre geworden ist, und sodann nach eingestellter Heizung sich selbst überlassen bleibt.

Wir wollen im Folgenden die Bedingungen festsetzen, welche die Annahme gerechtfertigt erscheinen lassen, wonach die zur Mittellinie senkrechten Ring- resp. Stabquerschnitte isotherme Flächen sind.

Es sei r der mittlere Ringhalbmesser, q die Fläche des überall gleichen, rechteckigen Ringquerschnittes, p der Umfang desselben, $2a = r_a - r_i$, die Differenz des äusseren und inneren Ringhalbmessers, also die Dicke des Ringes und 2b die Höhe desselben.

Die innere Wärmeleitung geht innerhalb eines homogenen Wärmeleiters nach dem Gesetze:

$$4) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}$$

von statten.

Für den stationären Temperaturzustand, für welchen die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

gilt, nimmt die Laplace'sche Gleichung die Form an:

$$5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Hiergegen gilt für ein Leiterelement, das an der Oberfläche des Leiters liegt, die Gleichung:

$$6) \qquad k \frac{\partial u}{\partial n} + h\,(u - u_a) = 0,$$

wo n die Richtung der positiven Oberflächennormalen bedeutet.

Machen wir von diesen Gesetzen an dem zu einem Stabe entwickelt gedachten Ringe für dessen stationären Wärmezustand Gebrauch, und zwar unter der vereinfachenden Annahme, dass c, k und h von der Temperatur unabhängige Grössen seien. Lassen wir die x Axe mit der Stabaxe, die zur x Richtung senkrechten y-, z-Richtungen mit denjenigen der Höhe und Breite des Stabquerschnitts zusammenfallen.

Es gelten sodann für unseren Stab die folgenden Oberflächengleichungen:

$$y = \pm a \ldots\ldots \qquad k \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y \ldots \pm a} + h\,(u_{y=\pm a} - u_a) = 0,$$

$$z = \pm b \ldots\ldots \qquad k \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z \ldots \pm b} + h\,(u_{z=\pm b} - u_a) = 0,$$

und die Grenzbedingungen:

$$x = 0 \ldots\ldots \qquad u = U,$$
$$x = 2r\pi \ldots \qquad u = U.$$

Als Lösung der Differentialgleichung erhalten wir dann:

$$u = \left(A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}\right) \cos(\mu y) \cos(\nu z),$$

worin

$$\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2,$$

$$\mu = \sqrt{\frac{h}{k}\,\frac{1}{a}}, \qquad \nu = \sqrt{\frac{h}{k}\,\frac{1}{b}} \quad \text{ist.}$$

Da nun innerhalb eines jeden Stabquerschnitts das Maximum der in ihm statt habenden Temperaturen seinem Mittelpunkte, also der Stelle ($y = 0$, $z = 0$) zukommt und das Temperatur-Minimum an seinen Eckpunkten, d. h. an den Stellen $y = \pm a$, $z = \pm b$ statt hat, so gelten als Extremwerte der innerhalb des Stabquerschnitts für $x = x$ herrschenden Temperaturen die folgenden:

$$u_{max} = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x},$$

$$u_{min} = \left(A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}\right) \cos(\mu a) \cos(\nu b).$$

Demnach ist der im betrachteten Leiterquerschnitt vorkommende maximale Temperaturunterschied, in Bruchteilen der maximalen Temperatur des nämlichen Querschnitts ausgedrückt, gleich

$$\frac{u_{max} - u_{min}}{u_{max}} = 1 - \cos(\mu a)\cos(\nu b) \sim 1 - \left(1 - \frac{ha}{2k}\right)\left(1 - \frac{hb}{2k}\right)$$

$$\sim \frac{h}{2k}(a + b).$$

Um den linearen Verlauf der Wärmebewegung in einem Stabe oder in einem zu einem Stabe entwickelt gedachten Ringe voraussetzen zu dürfen, muss also für eine entsprechende Wahl der Querschnittsdimensionen gesorgt werden, so dass $\frac{h}{2k}(a + b)$ eine verschwindend kleine Grösse werde.

Bei meinen Versuchen war im allerungünstigsten Falle, und zwar für die Bronze $Sn_{25}Cu_{75}$, für welche $\frac{h}{k} \sim 0{,}0025$ gefunden worden ist und $a = 0{,}688$, $b = 0{,}609$ war,

$$\frac{\Delta u_{max}}{u_{max}} \sim 0{,}0016.$$

So kann die Annahme, wonach die zur Ringmittellinie senkrechten Leiterquerschnitte isotherme Flächen sind, für meine speziellen Fälle als vollkommen zulässig erachtet werden.

Indem ich nun bezüglich der mit Zugrundelegung der erwähnten Annahmen durchzuführenden analytischen Entwickelungen in Betreff der Wärmebewegung im Ringe auf die zitierte Abhandlung des Herrn Prof. Weber verweise, gebe ich im folgenden sogleich das Endresultat an.

Indem man sich darauf beschränkt, die Vorgänge der Abkühlung blos an den zwei Stellen des Ringes, welche vom Heizquerschnitte in den längs der Ringmittellinie gemessenen Abständen $x_1 = \frac{2r\pi}{8}$ und $x_2 = 5 \cdot \frac{2r\pi}{8}$ liegen, experimentell verfolgen zu wollen, und den Ausdruck der halben Differenz Δ und denjenigen der halben Summe Σ der an diesen beiden Orten statthabenden Temperaturüberschüsse $v_1 = u_1 - u_a$ und $v_2 = u_2 - u_a$ bildet, so erhält man in Anbetracht dessen, dass

$\frac{h_1}{h_o} = 0{,}007$, $\frac{c_1}{c_a} \sim 0{,}001$, $\frac{k_1}{k_a} \sim 0{,}0008$, also durchwegs sehr klein sind, die vereinfachten Ausdrücke:

$$7) \quad \frac{v_1 - v_2}{2} = \Delta = A e^{-\left(\frac{h_o p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2}\right) t}$$

$$8) \quad \frac{v_1 + v_2}{2} = \Sigma = B e^{-\frac{h_o p}{c_a q} t} \left[1 + B \left(\frac{h_1}{h_o} - \frac{c_1}{c_a}\right) e^{-\frac{h_o p}{c_a q} t}\right],$$

als solche, welche schon in kurzer Zeit nach Beginn der Abkühlung die zeitliche Variation von Δ und Σ naturgetreu wiedergeben.

Bildet man nun das Verhältnis zweier um eine Minute zeitlich verschiedener Momentanwerte von Δ und Σ, und übergeht man vom Numerus auf den natürlichen Logarithmus, so findet man:

$$9) \quad l_n \left(\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right) = \frac{h_o p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2} = \Lambda_\Delta,$$

$$10) \quad l_n \left(\frac{\Sigma_n}{\Sigma_{n+1}}\right) = \frac{h_o p}{c_a q} + l_n \frac{1 + \beta e^{-\frac{h_o p}{c_a q} n}}{1 + \beta e^{-\frac{h_o p}{c_a q} (n+1)}} = \Lambda_\Sigma.$$

Während das logarithmische Dekrement von Δ, Λ_Δ eine Konstante ist, tritt im Ausdrucke von Λ_Σ zu der zu bestimmenden Grösse von $\frac{h_o p}{c_a q}$ noch ein Summand hinzu, welcher mit zunehmender Zeit abnimmt, so dass die Λ_Σ nach dem Grenzwert $\frac{h_o p}{c_a q}$ konvergieren. Aus dem zeitlichen Verlauf von Δ und Σ lässt sich einerseits $\frac{h_o p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2}$, anderseits $\frac{h_a p}{c_a q}$ herleiten.

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist $\frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2}$, woraus nach stattgehabter Bestimmung von c_a der Koeffizient der inneren Wärmeleitung k_a der Ringsubstanz für die Temperatur u_a (d. h. die äussere Temperatur, welcher der Ring konstant ausgesetzt war), berechnet werden kann.

B. Beschreibung der Versuche.

1. Kühlgefäss und Heizung.

Um die Ringe in einem Raum konstanter Temperatur zu haben, schloss ich sie in einen eigenst zu diesem Zwecke konstruierten Kühlapparat aus Kupferblech ein. Derselbe bestand aus zwei koaxialen, ringförmigen Kästen von 24,5 cm äusserem, 11,5 cm innerem Durchmesser und 6,5 cm Breite; der untere war 5 cm, der obere 3 cm hoch. Der erstere enthielt eine zur Aufnahme des Ringes dienende Nute von 25 mm Breite und 25 mm Tiefe. Wurde der obere Kasten auf den unteren aufgesetzt, so war die Nute vollkommen abgedeckt, und es entstand im Inneren des zusammengesetzten ringförmigen Kühlapparates ein gegen aussen vollkommen abgeschlossener, mit ihm koaxialer, ringförmiger Hohlraum von 6,25 cm^2 Querschnitt, welcher von allen Seiten durch Kühlwasser, das durch die beiden ringförmigen Kästen hindurchgeschickt wurde, umspühlt worden ist. Letzteres durchfloss die beiden Teile des Kühlgefässes in zwei parallelen Strömen so, dass es, neben einer Scheidewand eintretend, einen ganzen Kreislauf zu absolvieren und an der anderen Seite der Scheidewand aus dem Kühlapparat auszutreten gezwungen war. Dem Kühlwasser war ein ringförmiger Durchflussquerschnitt von 46 cm^2 geboten. Da die Temperatur des Kühlwassers mehrere Stunden hindurch nicht mehr als um $0,^{0}2$—$0,^{0}3$ variierte und während der Dauer eines Versuches bis auf $0,^{0}1$ konstant war, so konnte der ringförmige Innenraum des Kühlapparates als ein Raum konstanter Temperatur, nämlich derjenigen des Kühlwassers angesehen werden.

In diesem Hohlraum war der zu untersuchende Ring so eingekapselt, dass er auf den scharfen Kanten von vier Hartgummikeilen aufruhte, und an drei Stellen seiner inneren Mantelfläche durch Ebonitkeile derart fixiert war, dass weder eine Verschiebung, noch eine Berührung des Ringes mit den Wandungen des Kühlapparates möglich war.

An einer Stelle waren die beiden Teile des Kühlapparates, an zwei weiteren, welche von jener um $^1/_8$, resp. $^5/_8$ des mittleren Ringumfanges entfernt waren, war allein der obere Kühlring in halber Breite des Kastens durch je eine mit der Ringaxe parallele Röhre von 1,5 cm Durchmesser durchsetzt, so dass der eingeschlossene Hohlraum durch die so entstandenen Kanäle mit dem Aussenraume in Kommunikation stand. Dieselben wurden zur Einführung der Heizvorrichtung und der Thermoelemente benützt.

Die Heizung des Ringes geschah mittels siedenden Wasserdampfes, der durch ein den Ringquerschnitt durchsetzendes Röhrchen hindurchgeleitet wurde. Anfangs benutzte ich ein 6 cm langes Messingröhrchen von 5 mm Durchmesser und 0,2 mm Wandstärke, das in den Ring fest eingesetzt war. Dieses hatte jedoch während des Abkühlungsprozesses eine viel zu grosse Wärmeabfuhr von ihrer Oberfläche nach aussen hin bedingt, die insbesondere bei dem Zinnringe unangenehm zu Tage trat. Da Zinn sehr kleine Wärmekapazität besitzt und noch dazu der Zinnring von allen den untersuchten Ringen das kleinste Volumen hatte, so war beim Zinnringe jeder kleinste unerwünschte Wärmegewinn von aussen, resp. Wärmeverlust nach aussen hin im stande, eine ganz gewaltige Störung im Verlaufe der Wärmebewegung hervorzurufen, so dass ich diesen Ring als Prüfstein für die Richtigkeit meiner Messungen gebrauchen konnte. Nachdem ich der Störungsursache auf die Spur gekommen war, habe ich die Einrichtung getroffen, dass ich eine 5 mm dicke, etwas konisch gestaltete Heizröhre in die Bohrung des Ringes lose einsetzte, um sie jedesmal im Augenblicke der Unterbrechung der Heizung aus dem Ringe herauszuziehen und auf diese Weise den Ring vollkommen sich selbst überlassen zu können.

Der Zwischenraum zwischen der Heizröhre und den in den Kühlapparat eingelöteten Röhren, wie denn auch die anderen zwei, zur Einführung der Thermoelemente dienenden Kanäle wurden durch Watte ausgefüllt, so dass der Ring stets gegen aussen hin abgeschlossen blieb.

2. *Temperaturmessung.*

a) Thermoelemente.

Zur Temperaturmessung wurden Thermoelemente aus 0,15 resp. 0,2 mm dicken, umsponnenen Eisen- und Neusilberdrähten benutzt. Es wurden zwei Doppelelemente gebildet (S. die Figuren); die eine Lötstelle des einen L_1^I wurde im Ringquerschnitt zu $x_1 = \frac{2r\pi}{8}$, die eine L_1^{II} des anderen im Querschnitt zu $x_2 = 5\,\frac{2r\pi}{8}$ einen halben mm tief in den Ring fest hineingeklopft, während die zweiten Lötstellen L_0^I und L_0^{II} der zwei Doppelelemente in das aus dem Kühlapparat austretende Kühlwasser eingesetzt wurden. Die vier freien Eisendrahtenden a, b, c und d der Thermoelemente wurden an Kupferdrähte angelötet; diese vier Lötstellen wurden in einen Watteballen geknüllt, und auf diese Weise gegen äussere Wärmeeinflüsse geschützt.

Eine genaue Prüfung dieser Eisen-Neusilber-Kombination innerhalb des Temperaturintervalles 0^0—60^0 ergab eine streng lineare Beziehung zwischen der Grösse der thermoelektromotorischen Kraft und der sie hervorbringenden Temperaturdifferenz. Demnach waren die in den zwei Doppelementen entwickelten thermoelektromotorischen Kräfte mit den Temperaturdifferenzen

$$\left(u_{x_1=\frac{2r\pi}{8}} - u_a\right) \quad \text{und} \quad \left(u_{x_2=5\frac{2r\pi}{8}} - u_a\right),$$

also den Temperaturüberschüssen v_1 und v_2 proportional.

Die Temperatur u_a des Kühlwassers wurde mittels eines in zehntel Grade geteilten Haack'schen Thermometers gemessen.

b) Schaltung der Thermoelemente.

Zwecks Messung von A wurden die zwei einander entgegengeschalteten Thermoelemente mit einem sehr empfindlichen Galvanometer zu einem geschlossenen Leiterkreis verbunden (Fig. 1). Indem man nun beachtet, dass die Punkte L_1^I und L_1^{II} dieses Leiternetzes durch den Ring kurzgeschlossen sind, und dass ausser den in den zwei Thermoelementen $aL_1^IL_0^Ib$ und $cL_0^{II}L_1^{II}d$

erzeugten Thermo-EMKK E_1 und E_2 auch noch in dem von dem Eisendraht aL_1^I, der Ringsubstanz und dem Eisendraht $L_1^{II}d$ gebildeten Thermoelement eine EMK E_0 entwickelt wird, so kann man mittels der Kirchhoff'schen Gesetze für die Intensität des durch das Galvanometer fliessenden Thermostromes den Ausdruck

$$i = \frac{E_0 W + (E_1 - E_2) w_0}{(w + w_0) W + w w_0}$$

herleiten, wo w den Widerstand der Leiterstücke $L_1^I a h g f e d L_1^{II}$, W denjenigen der Leiter $L_1^I L_0^I b c L_0^{II} L_1^{II}$ und w_0 den Widerstand der zwischen L_1^I und L_1^{II} parallel geschalteten zwei Ringhälften bedeutet. Da nun w_0 eine gegenüber W verschwindend kleine Grösse ist, so gilt $i \sim \frac{E_0}{w}$.

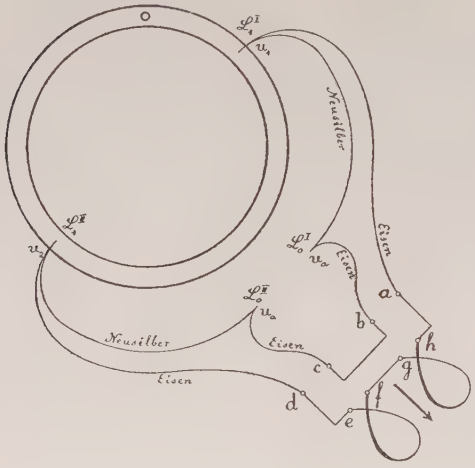

Fig. 1.

Es ist also der durch das Galvanometer fliessende Thermostrom allein von der durch die Kombination Eisen-Ringsubstanz-Eisen entwickelten Th. EMK abhängig und zwar mit dieser proportional; die Thermoelemente selbst sind demnach so gut wie ausgeschaltet.

Man hätte wohl die beiden Thermoelemente in voneinander getrennten Stromkreisen so verwenden können, dass sie mit je einer Spule des Differentialgalvanometers zusammengeschaltet worden wären, und man hätte auf diese Weise durch die in den beiden Stromkreisen erzeugten Thermoströme eine Differentialwirkung auf die Galvanometernadel hervorrufen können, jedoch war diese Methode aus dem Grunde zu verwerfen, weil das Δ innerhalb sehr kurzer Zeit zu einem kleinen Bruchteil seines Anfangswertes und zu einem so kleinen Bruchteil von v_1 resp. v_2 hinabsank, dass ein kleiner Fehler im Abgleichen der Spulen des Differentialgalvanometers eine vollkommen verzerrte Darstellung der wahren Vorgänge zur Folge gehabt hätte.

In Anbetracht dessen, dass der Anfangswert von Δ, d. h. der Wert von Δ bei der stationären Temperaturverteilung niemals mehr als 25° C. betrug und die Beobachtungen erst nach Verlauf von 5′ nach Beginn der Abkühlung begonnen wurden, demnach nur kleine Temperaturdifferenzen, die niemals mehr als 8° betrugen, messend verfolgt wurden, konnte angenommen werden, dass die Th. EMK E_0 mit der sie hervorbringenden Temperaturdifferenz $u_1 - u_2 = v_1 - v_2 = 2\Delta$ proportional ist, wesshalb denn auch die geschilderte Versuchsanordnung beibehalten wurde.

Behufs Messung von Σ war, um einwandsfreie Resultate zu erhalten, kein anderer Ausweg als der geblieben, die beiden Thermoelemente in der aus der nebenstehenden Figur ersichtlichen Weise mit einem Differentialgalvanometer derart zusammenzuschalten, dass zwei von einander getrennte Stromkreise entstanden. Die beiden mit den resp. Temperaturüberschüssen v_1, v_2 proportionalen Th. EMKK riefen im Galvanometer eine summarische Wirkung hervor. Nachdem das Abgleichen der beiden Galvanometerspulen und der beiden Stromkreise derart statt hatte, dass gleichen Temperaturdifferenzen, also gleichen EMKK^{-en} da und dort gleiche Ausschläge der Galvanometernadel entsprachen, so war die summarische Wirkung der beiden Thermoströme auf das Galvanometer der Summe $v_1 + v_2$, also Σ proportional.

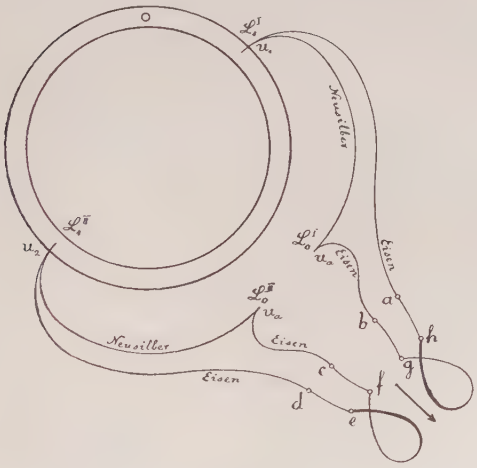

Fig. 2.

c) Das Galvanometer.

Indem wir uns anschicken, den zeitlichen Verlauf einer Temperaturdifferenz auf thermoelektrischem Wege mittels eines Galvanometers zu beobachten, werden wir vor allem eingehend zu prüfen haben, ob das benützte Instrument die zeitliche Variation der auf es einwirkenden Bewegungsursache, d. h. der zu messenden Temperaturdifferenz unverfälscht wiederzugeben im stande ist. Wir wollen daher die Bedingungen festlegen, welche das Galvanometer zu erfüllen hat, damit der Ausschlag seiner Magnetnadel in jedem Augenblicke der im selben Moment wirksamen thermoelektromotorischen Kraft proportional sei.

Bedeutet Q das Trägheitsmoment, M das magnetische Moment des Magneten, ϑ das Torsionsverhältnis, H die Horizontalkomponente der magnetischen Feldstärke, D das auf die Einheit der Winkelgeschwindigkeit bezogene Drehmoment der elektromagnetischen und Luftdämpfung, und ist x der Ablenkungswinkel der Galvanometernadel, so gilt als Differentialgleichung der Eigenbewegung des Galvanometers:

$$Q \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + MH(1 + \vartheta)\, x = 0.$$

Dies kann in die Form geschrieben werden:

$$11) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + bx = 0,$$

worin $$2a = \frac{D}{Q}, \quad b = \frac{MH(1+\vartheta)}{Q}.$$

Unter der Voraussetzung, dass $b < a^2$ ist, lautet die allgemeine Lösung obiger Differentialgleichung:

$$12) \qquad x = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t},$$

wo

$$13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = a + \sqrt{a^2 - b}, \\ \lambda_2 = a - \sqrt{a^2 - b}, \end{array} \right\} \quad \text{d. h.} \quad \begin{array}{l} a = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \\ b = \lambda_1 \lambda_2. \end{array}$$

Fliesst durch die Galvanometerspulen ein elektrischer Strom vom Momentanwerte i, so tritt zu den bereits angegebenen Drehmomenten noch das positive Drehmoment

$$14) \qquad GMi = cQi$$

hinzu, und es wird die Bewegungsgleichung des Magneten lauten:

$$15) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = ci.$$

Wir wollen die Voraussetzung treffen, dass die Galvanometerkonstante G und somit auch c für den ganzen Messbereich konstant sind, so dass das Drehmoment ci mit der Stromstärke i und somit der sie erzeugenden Temperaturdifferenz Δ resp. Σ streng proportional ist, also:

$$16) \qquad ci = cBe^{-\beta t} = \text{const. } e^{-\beta t}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (15) lautet sodann:

$$17) \quad x = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + \frac{cB}{(\lambda_1 - \beta)(\lambda_2 - \beta)} e^{-\beta t}.$$

Setzen wir noch die Bedingungen fest, dass

$$\text{für } t = 0 \ldots \qquad x = x_o \text{ und } \frac{dx}{dt} = 0,$$

d. h., dass wir die Zeitrechnung in dem Momente beginnen, in welchem wir die Heizung abbrechen und der Abkühlungsvorgang seinen Anfang nimmt, so erhalten wir:

$$18) \qquad A_1 = -\frac{x_o \lambda_2 + cB\frac{1}{\beta - \lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$19) \qquad A_2 = \frac{x_o \lambda_1 + cB\frac{1}{\beta - \lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Fernerhin gilt für den stationären Ausschlag x_o und den stationären Thermostrom von der Intensität i_o die Beziehung

$$MH(1 + \vartheta) x_o = GMi_o,$$

d. h. $$20) \qquad bx_o = ci_o = cB.$$

Aus (17), (18), (19) und (20) folgt nun:

$$21) \quad x = x_o \left\{ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\left(\lambda_2 - \frac{b}{\lambda_1 - \beta} \right) e^{-\lambda_1 t} - \left(\lambda_1 - \frac{b}{\lambda_2 - \beta} \right) e^{-\lambda_2 t} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{b}{(\lambda_1 - \beta)(\lambda_2 - \beta)} e^{-\beta t} \right\},$$

oder $$22) \qquad = X_o \left\{ \mu e^{-\lambda_1 t} - \nu e^{-\lambda_2 t} + e^{-\beta t} \right\}.$$

Damit x ein richtiges Mass für i, d. h., mit $e^{-\beta t}$ proportional sei, wäre es also notwendig, dass λ_1 und λ_2 möglichst gross, gleichzeitig auch noch μ und ν gegenüber Eins klein seien, so dass die ersten zwei Glieder im Klammerausdrucke von (22) schon binnen kurzer Zeit nach Beginn der Abkühlung zu relativ zu $e^{-\beta t}$ verschwindend kleinen Grössen hinabsinken würden.

Leider lassen sich diese Bedingungen nicht alle auf ein Mal effektuieren, denn wenn das eine Mal a sehr gross und b sehr klein ist, so wird wohl λ_1 sehr gross und μ klein ausfallen, jedoch resultiert λ_2 klein und ν gross; ist dagegen ein anderes Mal b gross und a klein, d. h., b von a^2 kaum verschieden, so wird $(\lambda_1 - \lambda_2)$ sehr klein und damit μ und ν sehr gross werden. Man kann jedoch darüber, welcher von diesen zwei Fällen der günstigere ist, wie folgt, entscheiden.

Nimmt man an, dass b sehr klein sei, also

$$\lambda_1 = 2a - \delta, \quad \lambda_2 = \delta, \quad \text{wo } \lim \delta = 0,$$

so findet man:

$$\lim_{\delta = o} \left[\frac{(\lambda_2 - \beta)\,\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_1 - \beta)\,\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} \right] = \frac{\beta}{4a^2} e^{-2at} - \infty.$$

Wird dagegen vorausgesetzt, dass $b = a^2$, also

$$\lambda_1 = a + \delta, \quad \lambda_2 = a - \delta, \quad \text{wo } \lim \delta = 0,$$

so erhält man:

$$\lim_{\delta = o} \left[\frac{(\lambda_2 - \beta)\,\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_1 - \beta)\,\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} \right] = - e^{-at} \frac{a + \beta}{a^2}.$$

Demnach erscheint es als wünschenswert:

1. das a, d. h. die Dämpfung des Galvanometers, so gut es geht, zu erhöhen;

2. die Direktionskraft H so weit zu vergrössern, dass b dem Wert von a^2 möglichst nahe komme.

Aus (22) ist auch zu ersehen, dass unsere Forderung umso eher erfüllt sein wird, je kleiner β ist.

* * *

Ich benutzte ein mit vier Spulen und einem astatischen Ringmagnetpaar ausgerüstetes, aperiodisches Galvanometer von der Firma Hartmann & Braun.

Da sich die Magnete in unmittelbarer Nähe des Kupferdämpfers bewegen, so ist das Magnetsystem ganz gewaltig gedämpft.

Das Galvanometer erfüllt die Bedingung, wonach seine Konstante auch wirklich konstant sei, für Ausschläge bis zu 500 mm bei 2000 mm Skala-Spiegeldistanz aufs Glänzendste. Eine sorgfältige Aichung des Galvanometers ergab nämlich für die durch die Gleichung

$$x' = Ci$$

($x' \equiv$ der auf den Bogen reduzierte konstante Galvanometerausschlag) definierte Konstante für $x = 50—550$ Zahlenwerte, welche vom Mittel nicht mehr als $\pm$ 1‰ abweichen.

Um die Bewegungsgleichung des Galvanometers für die nämlichen Verhältnisse zu erhalten, als unter welchen es bei den Messungen funktionierte, wurde durch die Galvanometerspulen ein konstanter Strom geschickt, alsdann dieser, nachdem der stationäre Ausschlag längere Zeit hindurch angehalten hatte, unterbrochen, gleichzeitig das Galvanometer mittels induktionsloser Leiter, deren Widerstand gleich demjenigen der Thermoelemente war, kurz geschlossen und die Bewegung des Magnetpaares messend verfolgt. So waren in einem Falle die in Intervallen zu 5″ abgelesenen Ausschläge x_{red}:

t = 0″,	x′ = 510	t = 30″,	x′ = 59,2	t = 60″,	x′ = 8,1
5″,	355	35″,	41,8	65″,	6,1
10″,	246	40″,	29,5	70″,	4,5
15″,	172,5	45″,	21,4	75″,	3,5
20″,	119,5	50″,	15,3	80″,	2,6.
25″,	84,5	55″,	8,8		

Aus zahlreichen solchen Versuchen heraus wurden die Werte von λ_1 und λ_2 ermittelt und gefunden zu:

$$\lambda_1 = 4{,}57,\ \lambda_2 = 4{,}52.$$

Demnach ergiebt sich für den beim Zinnringe vorliegenden ungünstigsten Fall, wo $\beta = 0{,}365$ ist:

$$\mu = \frac{\beta(\lambda_2 - \beta)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} = 6{,}64, \quad \nu = \frac{\beta(\lambda_1 - \beta)}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} = 6{,}80;$$

$$\frac{b}{(\lambda_1 - \beta)(\lambda_2 - \beta)} = \frac{1}{0{,}84} = 1{,}188,$$

und lautet (21):

$$x = \frac{x_0}{0{,}84}\left[6{,}64\, e^{-4{,}57\,t} - 6{,}80\, e^{-4{,}52\,t} + e^{-0{,}365\,t}\right].$$

Daher ist zur Zeit: $t = 0 \ldots a = \frac{x_0}{0{,}84}\, 0{,}84 = x_0$,

$t = 1' \ldots . a = [0{,}826\, x_0]\, (1 - 0{,}0072)$,

$t = 2' \ldots . a = [0{,}574\, x_0]\, (1 - 0{,}000185)$,

etc.

Also ist das x von dem der zu messenden Grösse proportionalen Gliede $X_0 e^{-\beta t}$ bereits nach 2' weniger als um 0,2 ‰ verschieden.

Wartet man also nach Abschluss der Heizung einige Minuten, so ist der auf den Bogen reduzierte Ausschlag des Galvanometers ein genaues Mass der zu messenden Temperaturdifferenz.

---

3. Gang der Versuche.

Vor allem wurde das Kühlwasser durch den Kühlapparat hindurch in Strömung versetzt; eine Viertelstunde nachher wurde mit der Heizung des Ringes begonnen, welche stets so lange anhielt, dass der an der Konstanz des Galvanometerausschlages erkennbare stationäre Wärmezustand des Ringes 10—15' lang aufrechterhalten blieb.

Die Dauer der Heizung betrug nach Massgabe der Zeit, welche zur Erreichung der stationären Temperaturverteilung im Ringe notwendig war, 55—75 Minuten. Unmittelbar nach Unterbrechung der Heizung wurde — indem vorher das Fernrohr auf 600,0 eingestellt worden war — der Galvanometerkreis geschlossen und 4—6' nachher mit den Ablesungen begonnen, die bei den Δ-Reihen in Intervallen zu 10", für Σ-Reihen in solchen von 30" statt hatten. Die Ablesungen wurden bei einem Ausschlage von ca. 400 mm begonnen und der Verlauf von Δ resp. Σ bis zu x = 150—100 resp. 250—200 mm hinab messend verfolgt. Am Ende jedes Versuches wurde die Ruhestellung der Galvanometernadel beobachtet, und deren Änderung, welche gewöhnlich nicht mehr als 1—2 mm betrug, bei der Reduktion der Ausschläge berücksichtigt.

Die Temperatur des Kühlwassers wurde von zwei zu zwei Minuten beobachtet. Sie änderte sich während der Dauer der Beobachtungen höchstens um 0,°01 – 0,°02.

Das zur Messung von Σ notwendige Abgleichen der beiden Thermostromkreise geschah auf die folgende Art. Es wurden einerseits die Widerstände der beiden Thermoelemente und der Zuführungsdrähte, andererseits diejenigen der beiden Galvanometerspulenpaare des sorgfältigsten abgeglichen. Sodann wurden letztere einander entgegengeschaltet, und indem man durch sie einen Strom relativ grosser Intensität hindurchschickte, sind die Stellungen der beiden Spulenpaare so lange abgeändert worden, bis die resultierende elektromagnetische Wirkung dieser auf den Magneten Null wurde.

---

4. Auswertung der Messresultate.

Ist der zeitliche Verlauf von Δ aufgenommen worden, so kann daraus, wie wir bereits gesehen haben,

$$\frac{h_0 p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a} \cdot \frac{1}{r^2}$$

hergeleitet werden, indem man die Differenzen der natürlichen Logarithmen von je zwei auf den Bogen reduzierten Ausschlägen bildet, welche zeitlich um 1 Minute von einander verschieden sind. Ist alle 10 Sekunden eine Beobachtung gemacht, und sind hierbei die Ausschläge s_0, s_1, s_2, s_3, ... notiert worden, so ist laut (9):

$$\Delta_\Delta = \lg\left(\frac{s_0'}{s_6'}\right) = \lg\left(\frac{s_1'}{s_7'}\right) = \lg\left(\frac{s_2'}{s_8'}\right) = \ldots = \frac{h_0 p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a}\frac{1}{r^2},$$

wo s' das Zeichen für die gemäss der Ruhelagenänderung korrigierte und auf den Winkel reduzierte Ablesung ist.

Sind die um 1 Minute zeitlich von einander verschiedenen Werte von Σ durch die reduzierten Ablesungen σ_0', σ_1', σ_2', ... allgemein σ_t', σ'_{t+1} dargestellt, so ist laut (10)

$$\Delta_\Sigma = \lg\left(\frac{\sigma_t'}{\sigma'_{t+1}}\right) = \frac{h_0 p}{c_a q} + \lg \frac{1 + \alpha e^{-\frac{h_0 p}{c_a q} t}}{1 + \alpha e^{-\frac{h_0 p}{c_a q}(t+1)}},$$

d. h., Δ_Σ wird einen Abfall aufweisen; dieser wird aber der Kleinheit von $\frac{h_0 p}{c_a q}$ wegen so klein ausfallen, dass man Δ_Σ als eine lineare Funktion der mittleren Summe:

$$\Sigma_m = \frac{\sigma_t' + \sigma'_{t+1}}{2}$$

betrachten können wird.

Man kann nun setzen:

$$\Sigma_{01} = \frac{\sigma_0' + \sigma_1'}{2} \ldots\ldots \quad \Delta_{01} = \lg\left(\frac{\sigma_0'}{\sigma_1'}\right) = \frac{h_{01}p}{c_a q},$$

$$\Sigma_{12} = \frac{\sigma_1' + \sigma_2'}{2} \ldots\ldots \quad \Delta_{12} = \lg\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}\right) = \frac{h_{12}p}{c_a q},$$

$$\Sigma_{23} = \frac{\sigma_2' + \sigma_3'}{2} \ldots\ldots \quad \Delta_{23} = \lg\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_3'}\right) = \frac{h_{23}p}{c_a q},$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots .$$

Der Grenzwert von Δ_m, welcher $\Sigma_m = 0$ entspricht, giebt den gesuchten Wert von $\frac{h_o p}{c_a q}$. Diesen kann man in folgender Weise ermitteln. Hat man eine Reihe von Σ_m mit den entsprechenden Δ_m bestimmt, so bildet man:

$$\Sigma_{01} - \Sigma_{12} \ldots\ldots \Delta_{01} - \Delta_{12},$$
$$\Sigma_{12} - \Sigma_{23} \ldots\ldots \Delta_{12} - \Delta_{23},$$
$$\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \text{, allgemein:}$$
$$\Delta(\Sigma_m) \quad \ldots\ldots \quad \Delta(\Delta_m).$$

Berechnet man nun das Mittel von allen den $\frac{\Delta(\Delta_m)}{\Delta(\Sigma_m)}$, so gewinnt man die Abnahme von Δ, welche der Abnahme von Σ_m um die Einheit entspricht. Ermittelt man noch aus den obigen Reihen von Σ_m und Δ_m die Mittelwerte $(\Sigma_m)_m$ und $(\Delta_m)_m$, so ergiebt sich der dem $\Sigma_m = 0$ entsprechende Wert von Δ:

$$24) \qquad \Delta_o \equiv \frac{h_o p}{c_a q} = (\Delta_m)_m - (\Sigma_m)_m \frac{\Delta(\Delta_m)}{\Delta(\Sigma_m)}.$$

Diese Rechnungsweise wurde an den alle 30 Sekunden gemachten Ablesungen von Σ so durchgeführt, dass stets die um 2′ voneinander zeitlich verschiedenen Werte von Σ zusammengefasst, also 2 $\Delta(\Sigma_m)$ und 2 $\Delta(\Delta_m)$ gebildet worden sind.

5. *Wiedergabe eines Versuches.*

Im folgenden ist für die Bronze Sn_{75} Cu_{25} je eine Versuchsreihe für Δ und Σ, wie auch die Berechnungsweise von A_Δ und $(A_0)_\Sigma$ zur Schau gebracht.

In der Tabelle der Beobachtungsreihe für Δ sind angegeben: die vom Beginn der Abkühlung an gerechneten Zeitmomente, zu welchen abgelesen worden ist, die reduzierten Ablesungen s', log s' und deren Differenzen $(\Delta \log s')_{\text{für } 1'}$, fernerhin die Temperatur u_a des Kühlwassers. In der Tabelle der Beobachtungsreihe für Σ sind verzeichnet: die Zeit der Ablesung, u_a, σ', $\log \sigma'$, $[\Delta(\log \sigma')]_{\text{für } 2'}$, fernerhin $(\Sigma_m)_{\text{für } 2'}$, $[\Delta(\Sigma_m)]_{\text{für } 2'}$, und $[\Delta(\Delta \log \sigma')]_{\text{für } 2'}$, wo die letzteren zwei Grössen mit $2 \,.\, \Delta(\Sigma_m)$ und $2 \,.\, 0{,}4343 \,.\, \Delta(A_m)$ (entsprechend der im vorigen gebrauchten Bezeichnungsweise) identisch sind.

Bronze Sn_{75} Cu_{25}.

1) A_Δ.

Zeit	s'	log s'	$(\Delta \log s')_{\text{für } 1'}$	u_a	Zeit	s'	log s'	$(\Delta \log s')_{\text{für } 1'}$	u_a
4' 0"	432,8	2,63629		13,°150	6'50"	198,0	2,29667	0,11997	
10"	413,4	61637			7' 0"	189,0	27646	11926	
20"	394,8	59638			10"	180,5	25648	12028	
30"	377,1	57651			20"	172,3	23629	12031	
40"	360,1	55642			30"	164,5	21617	12029	
50"	344,0	53656			40"	157,3	19673	12008	
5' 0"	328,4	51640	0,11989		50"	150,3	17696	11971	
10"	314,0	49693	11944		8' 0"	143,4	15655	11991	
20"	299,8	47683	11955		10"	136,9	13640	12008	
30"	286,1	45652	11999		20"	130,8	11661	11968	
40"	273,2	43648	11994		30"	124,9	09656	11961	
50"	261,0	41664	11992		40"	119,2	07628	12045	
6' 0"	249,3	39672	11968		50"	113,9	05652	12044	
10"	238,1	37676	12017		9' 0"	108,7	03623	12032	
20"	227,3	35660	12023		10"	103,9	01662	11978	
30"	217,0	33646	12002		20"	99,2	1,99651	12010	13,°140
40"	207,4	31681	11983						

Hieraus

$$u_a = 13{,}°145 \ldots \qquad \mathbf{0{,}4343 \,.\, A_\Delta = 0{,}11990.}$$

2) Δ_{Σ}.

Zeit	σ'	log σ'	$(\Delta \log \sigma')_{\text{für } 2'}$	Σ_m	$[\Delta(\Sigma_m)]_{\text{für } 2'}$	$[\Delta(\Delta \log \sigma')]_{\text{für } 2'}$	u_a
6′ 0″	418,4	2,62159					13,°615
30″	406,0	60853					
7′ 0″	393,9	59539					
30″	381,9	58195					
8′ 0″	370,1	56832	0,05327	394,2			13,°610
30″	359,3	55546	5307	382,6			
9′ 0″	348,8	54258	5281	371,3			
30″	338,2	52917	5278	360,0			
10′ 0″	327,9	51574	5278	349,0	45,2	0,00049	13,°610
30″	318,2	50270	5276	338,7	43,9	31	
11′ 0″	309,0	48996	5262	328,9	42,4	19	
30″	299,8	47683	5234	319,0	41,0	44	
12′ 0″	290,7	46345	5229	309,3	39,7	49	13,°605
30″	282,1	45040	5230	300,1	38,6	46	
13′ 0″	274,0	43775	5221	291,5	37,4	41	
30″	265,8	42455	5228	282,8	36,2	06	
14′ 0″	257,8	41128	5217	274,2	35,1	12	13,°605
30″	250,2	39829	5211	266,1	34,0	19	
15′ 0″	243,0	38561	5214	258,5	33,0	07	
30″	235,8	37254	5201	250,8	32,0	27	
16′ 0″	228,8	35946	5182	243,3	30,9	35	13,°600
30″	222,1	34655	5174	236,1	30,0	37	
17′ 0″	215,8	33405	5156	229,4	29,1	58	
30″	209,5	32118	5136	222,6	28,2	65	
18′ 0″	203,3	30814	5132	216,0	27,3	50	13,°600
30″	197,3	29513	5142	209,7	26,4	32	
19′ 0″	191,8	28285	5120	203,8	25,6	36	
30″	186,2	26998	5120	197,8	24,8	16	
20′ 0″	180,7	25696	5118	192,0	24,0	14	13,°600
	Mittelwerte:		0,05211	281,2	33,55	0,00033	13,°605

Entspricht also der Änderung von Σ_m um den Betrag 33,55 die Änderung von $(\Delta \log \sigma')_{\text{für } 2'}$ um 0,00033, so entspricht der Änderung von Σ_m um den Betrag 281,2 die Änderung von $(\Delta \log \sigma')_{\text{für } 2'}$ um den Betrag:

$$[\Delta(\Delta \log \sigma')_{\text{für } 2'}]_{\text{für } 2'} = 281{,}2 \cdot \frac{0{,}00033}{33{,}55} = 0{,}00276.$$

Also ist der $\Sigma_m = 0$ entsprechende Wert des logarithmischen Dekrementes für 2 Minuten:

$$(\Delta \log \sigma')_{\text{für } 2',\ \Sigma_m = 0} = 0{,}05211 - 0{,}00276 = 0{,}04935,$$

und ist demnach $(\Delta \log \sigma')_{\text{für } 1',\ \Sigma_m = 0} = \mathbf{0{,}4343\ \Delta_{\Sigma} = 0{,}02467.}$

C. Versuchsergebnisse.

ua	$(\Delta \log s')_{f.1'} = 0{,}4343 \cdot \Delta\Delta$	ua	$(\Delta \log \sigma')_{f.2'}$	$(\Sigma'_m)_{m\,f.2'}$	$(\Delta \Sigma'_m)_{m\,f.2'}$	$[\Delta(\Delta \log \sigma')_{f.2'}]_{f.2'}$	$(\Delta \log \sigma')_{f.1',\,\Sigma_m=0} = 0{,}4343 \cdot \Delta\Sigma$
				I. Zinn.			
14,°320	**0,1593**	14,°300	0,08076	268,2	49,5	0,00091	**0,0379**
14,°205	**0,1599**	14,°390	0,08078	265,0	48,8	0,00084	**0,0381**
14,°215	**0,1594**	14,°302	0,08110	289,2	53,7	0,00094	**0,0380**
14,°215	**0,1589**	14,°238	0,08072	255,8	47,3	0,00078	**0,03825**
14,°192	**0,1594**						
14,°145	**0,1583**						
14,°215	**0,1592**	14,°308					**0,0381**
				II. Bronze Sn_{90} Cu_{10}.			
13,°985	**0,1310**	13,°920	0,05920	258,2	35,0	$0{,}00039_5$	**0,02814**
13,°857	**0,1303**	14,°022	0,05943	249,3	$35{,}0_5$	$0{,}00040_8$	**0,02826**
13,°823	**0,1298**	14,°071	0,05942	277,6	37,2	$0{,}00040_9$	**0,02818**
13,°592	**0,1304**	13,°940	0,05938	248,9	34,5	$0{,}00039_7$	**0,02826**
13,°503	**0,1305**						
13,°75	**0,1304**	13,°90					**0,0282**
				III. Bronze Sn_{75} Cu_{25}.			
13,°490	**0,1197**	13,°605	0,05211	281,2	$33{,}5_5$	0,00033	**0,02467**
13,°250	**0,1192**	13,°527	0,05214	282,6	33,8	$0{,}00032_5$	**0,02471**
13,°145	**0,1199**	13,°522	0,05245	309,9	36,9	$0{,}00034_2$	**0,02480**
13,°085	**0,1193**	13,°585	0,05237	298,2	35,7	$0{,}00033_8$	**0,02476**
13,°035	**0,1193**						
13,°105	**0,1196**						
13,°185	**0,1195**	13,°56					**0,0247**
				IV. Bronze Sn_{25} Cu_{75}.			
13,°115	**0,04395**	13,°195	0,03534	310,1	25,4	0,00018	**0,01656**
13,°180	**0,04340**	13,°100	0,03561	295,3	$24{,}1_5$	$0{,}00020_5$	**0,01655**
13,°252	**0,04356**	13,°310	0,03528	296,4	24,0	0,00018	**0,01656**
13,°195	**0,04348**	13,°325	0,03509	290,8	24,0	0,00014	**0,01670**
13,°182	**0,04394**						
13,°19	**0,04366**	13,°23					**0,01659**
				V. Bronze Sn_{10} Cu_{90}.			
13,°765	**0,06262**	13,°616	0,03405	325,9	25,5	0,00016	**0,01599**
13,°692	**0,06264**	13,°685	0,03344	319,6	$24{,}8_5$	0,00016	**0,01569**
13,°700	**0,06257**	13,°650	0,03345	314,5	$24{,}2_5$	$0{,}000144$	**0,01579**
13,°595	**0,06283**	13,°695	0,03363	323,3	24,9	0,00016	**0,01577**
13,°530	**0,06232**						
13,°65	**0,06256**	13,°65					**0,01577**

In nebenstehender Tabelle gebe ich die Ringdimensionen (und zwar den äusseren, inneren und mittleren Radius r_a, r_i und r, die Dicke des Ringes d, den Ringquerschnitt q, und dessen Umfang p), die spezifische Wärme der Volumeneinheit bei 13,°5 in den Einheiten g-cal/cm³ und erg/cm³, die mittlere Temperatur, auf welche sich das Mittel der bestimmten Wärmeleitungsfähigkeiten jeweilen bezieht, fernerhin $0{,}4343 \cdot \frac{k_a}{c_a} \cdot \frac{1}{r^2}$ und endlich die mit Zugrundelegung der Einheiten des CGS-Systems berechneten Koeffizienten k_a der inneren Wärmeleitung an, wobei ein Mal die g-cal, das andere Mal das erg als Einheit der Wärmeenergiemenge genommen wurde.

Da die Temperaturen u_a von einander nur ganz wenig abweichen, so kann man die erhaltenen Wärmeleitungsfähigkeiten durchwegs der mittleren Temperatur $u_a = 13,°5$ zuordnen. Die Wärmekapazität c wurde für die gleiche Temperatur ermittelt.

Das für reines Zinn gewonnene Resultat stimmt mit den Angaben von H. F. Weber, welcher $k_o = 0{,}1446$ fand, gut überein. Denn angenommen, dass der Temperaturkoeffizient $\frac{k_1}{k_0} = 0{,}0008$ ist, so resultierte daraus für $u = 13,°5$ der Wert $k_{13,°5} = 0{,}1430$. Jäger und Diesselhorst fanden $k_{18°} = 0{,}61$; der von mir gefundene Wert ist also um weniges kleiner.

Material	Ringdimensionen					$c_{13,°5}$		u_a	$0{,}4343 \cdot \frac{k_a}{c_a} \cdot \frac{1}{r^2}$	k_a Einheit der Wärmeenergie:	
	r_a	r_i	r	d	q	p	g-cal/cm³	erg/cm³			g-cal	erg
	cm	cm	cm	cm	cm^2	cm						
Sn	9,550	8,253	8,902	0,813	1,055	4,220	0,3865	$1{,}623 \cdot 10^7$	$14,°25$	0,1211	**0,1424**	$\mathbf{0{,}598 \cdot 10^7}$
$Sn_{90}Cu_{10}$	9,654	8,304	8,929	1,178	1,589	5,056	0,417	$1{,}75 \cdot 10^7$	13,°8	0,1022	**0,1309**	$\mathbf{0{,}550 \cdot 10^7}$
$Sn_{75}Cu_{25}$	9,647	8,266	8,956	1,190	1,642	5,140	0,476	$2{,}00 \cdot 10^7$	13,°2	0,0948	**0,1395**	$\mathbf{0{,}586 \cdot 10^7}$
$Sn_{25}Cu_{75}$	9,544	8,167	8,855	1,218	1,676	5,190	0,725	$3{,}04 \cdot 10^7$	13,°2	0,0270	**0,0590**	$\mathbf{0{,}248 \cdot 10^7}$
$Sn_{10}Cu_{90}$	9,640	8,264	8,955	1,195	1,651	5,152	0,731	$3{,}07 \cdot 10^7$	13,°65	0,0468	**0,1052**	$\mathbf{0{,}442 \cdot 10^7}$

Material	Kupfergehalt (Gew.-% | Vol.-% | Mol.-%)	Dichte f. 14°	$\omega\ 10^{-4}$ für 13,°5	$\varkappa \cdot 10^{5}$ für 13,°5	α	k für 13,°5 (g-cal)	Spezif. Wärme $C_{13,5}$ (g-cal)	$c_{13,5}$	k 10^{-7} f. 13,°5 (erg)	Spezif. Wärme $C_{13,5}\ 10^{-7}$ (erg)	$c_{13,5}\ 10^{-7}$ (erg)	Leitverhältnis f. 13,°5 $\frac{k}{\varkappa} \cdot 10^{-4}$ (g-cal)	$\frac{k}{\varkappa} \cdot 10^{-8}$ (erg)
Sn	0 0 0	7,31	1,182	8,45	0,00418	0,1424	0,0529	0,3865	0,598	0,222	1,625	**0,1685**	**707**
$Sn_{90}Cu_{10}$	9,75 8,15 16,75	7,515	1,185	8,43	0,00403	0,1309	0,0555	0,417	0,550	0,233	1,75	**0,155**	**651**
$Sn_{75}Cu_{25}$	24,95 21,4 38,2	7,815	1,157	8,64	0,00229	0,1395	0,0605	0,476	0,586	0,254	2,00	**0,1615**	**679**
$Sn_{25}Cu_{75}$	75,55 71,7 85,7	8,89	3,110	3,22	0,00062	0,0590	0,0816	0,725	0,248	0,3425	3,045	**0,1835**	**771**
$Sn_{10}Cu_{90}$	90,1 88,15 94,4	8,475	1,625	6,15	0,00224	0,1052	0,0862	0,731	0,442	0,362	3,07	**0,171**	**718**

V.

Das Leitverhältnis.

Im folgenden will ich noch eine zusammenfassende Darstellung der an den fünf untersuchten Metallen erzielten Versuchsresultate geben. Ich sehe hierbei, um Wiederholungen zu vermeiden, von einer getrennten Besprechung ihrer einzelnen physikalischen Eigenschaften, welche Gegenstand unserer Untersuchungen waren, ab und indem ich diesbezüglich auf die Schlussworte der einzelnen Abschnitte verweise, gehe ich hier allein auf die Diskussion des Leitverhältnisses der fünf Metalle ein.

Die nebenstehende Schlusstabelle enthält die Zahl der Gewichts-, Volumen- und Molekularprozente des Kupfergehaltes, die Dichte, die auf die nämliche Temperatur bezogenen elektrischen und thermischen Leitungsfähigkeiten $\varkappa$ und k, den Temperaturkoeffizienten α des elektrischen Widerstandes, die Wärmekapazität pro Masseneinheit und diejenige pro Volumeneinheit für 13,°5 C. und das Leitverhältnis $\frac{k}{\varkappa}$ für die gleiche Temperatur. Allen diesen Zahlenangaben sind die Einheiten des CGS-Systems zu Grunde gelegt. Für C, c, k und $\frac{k}{\varkappa}$ sind jeweilen zwei Zahlenwerte angegeben, wobei das eine Mal die g-cal, das andere Mal das erg als Einheit der Wärmeenergie figuriert.

Nachdem die in den letzten zwei Kolumnen enthaltenen Zahlen im Betrage des Leitverhältnisses Unterschiede bis zu 16% aufweisen, so kann keineswegs behauptet werden, dass das Leitverhältnis der untersuchten fünf Metalle angenähert konstant sei. Es ist hiermit vielmehr ein abermaliger Beweis erbracht, dass das Wiedemann-Franz'sche Gesetz für Legierungen ungültig ist.

Das Beobachtungsmaterial der im vorliegenden beschriebenen Versuche war wohl zu spärlich, um daraus eine Gesetzmässigkeit im Verlaufe des Leitverhältnisses in Funktion des Prozentgehaltes der Bestandteile Cu und Sn mit Sicherheit herleiten zu können; doch so viel ist zu erkennen, dass das Leitverhältnis mit zunehmendem Kupfergehalt ähnlich wie das thermische Leitungsvermögen zunächst ab-, sodann zunimmt, und dass das Leitverhältnis der kupferreichen Bronzelegierungen mit zunehmendem Zinngehalt eine beträchtliche Zunahme erfährt, also sich im entgegengesetzten Sinne ändert, als das thermische oder elektrische Leitungsvermögen. Es kann auch als wahrscheinlich dahingestellt werden, dass da, wo die beiden Leitungsvermögen ein Minimum aufweisen, das Maximum des Leitverhältnisses statt hat.

Demnach scheint im Verlaufe des Leitverhältnisses von Kupfer-Zinn-Legierungen in Funktion der Volumprozente ihrer Bestandteile eine Gesetzmässigkeit ebenso zu bestehen, wie sich solche aus den eingangs [1]) erwähnten Versuchen von F. A. Schulze für Wismut-Blei- und Wismut-Zinn-Legierungen ergeben haben.

* * *

Zum Schlusse gestatte ich mir noch, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. **H. F. Weber,** meinen innigstgefühlten Dank auszusprechen für die Unterstützungen und Belehrungen, die er mir während meiner Studienzeit in so reichem Masse zu teil werden liess.

[1]) S. Einleitung, pag. 4.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

1. Beziehung zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und der elektrischen Leitungsfähigkeit der Legierungen 1
2. Über Kupfer-Zinn-Legierungen 6

I. Die untersuchten Metalle 11

II. Messung der elektrischen Leitungsfähigkeit.

A. Theorie der Messmethode 13
Die Poldistanz des Magneten 20
B. Beschreibung der Versuche.
1. Versuchsanordnung und Messmethode zur Bestimmung der logarithmischen Dekremente und der Schwingungsdauer:
Versuchsanordnung 26
Messverfahren 27
2. Versuchsanordnung und Messmethode zur Bestimmung des magnetischen Momentes des Magneten:
a) Bestimmung von (MH/Q) 30
b) Bestimmung von (M/H) 30
3. Wiedergabe einer Versuchsreihe 32
4. Hilfsmessungen:
a) Bestimmung der Poldistanz des Magneten 39
b) Bemerkung 41
c) Bestimmung des Temperatur-Koeffizienten des Magneten 42
C. Versuchsergebnisse 43

III. Messung der spezifischen Wärme.

1. Messapparate und Messverfahren 49
2. Wiedergabe eines Versuches 52
3. Versuchsergebnisse 54

IV. Messung der Wärmeleitungsfähigkeit.

A. Theorie der Messmethode 56
B. Beschreibung der Versuche.
1. Kühlgefäss und Heizung 61
2. Temperaturmessung:
a) Thermoelemente 63
b) Schaltung der Thermoelemente 63
c) Das Galvanometer 66
3. Gang der Versuche 70
4. Auswertung der Messresultate 71
5. Wiedergabe eines Versuches 73
C. Versuchsergebnisse 75

V. Das Leitverhältnis 77